МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Министерство образования, науки и молодежной политики

Нижегородской области.

Администрация Лукояновского муниципального округа

МБОУ Ульяновская СШ

РАССМОТРЕНО	СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДЕНО
На заседании ШМО	Заместитель директора по УЧ	Директор
	Голованова С.П.	Маркина Е.В.
Протокол №1 от «31» 08 2023 г.	Протокол №1 от «31» 08 2023 г.	Приказ №91/1-ОД от «31» 08 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

курса по выбору

Избранные вопросы математики

для обучающихся 8-9 классов

с Ульяново 2023

1.Пояснительная записка

Факультативный курс «Избранные вопросы математики» разработан на основе факультативного курса для 8-9классов «Предпрофильная подготовка учащихся»

Составители:
И.Г. Малышев, канд. техн. наук,
доцент кафедры теории и методики обучения математике НИРО
М.А. Мичасова, канд. пед. наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике НИРО

Данный факультативный курс выполняет функцию поддержки основных курсов цикла математического образования основной школы и ориентирован на углубление и расширение предметных знаний по математике и соответствующих компетентностей по ним.

Если для учащихся 8-го класса курс больше соответствует факультативным занятиям, то уже в 9-м классе курс может быть включён в систему предпрофильной подготовки учащихся.

Факультативные занятия – форма учебной работы, состоящая в развитии способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой; зарождение интереса к математике на первичном уровне.

Цели:

- расширение кругозора учащихся,
- развитие математического мышления,
- формирование активного познавательного интереса к предмету,
- воспитание мировоззрения и личностных качеств, средствами углублённого изучения математики.

Полностью курс рассчитан на два учебных года. Общий объем развернутого курса 68 часов.

2. Общая характеристика курса

Факультативные занятия по математике дополняют обязательную программу по алгебре и геометрии и призваны, прежде всего, способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, предусмотренного программой.

Факультативные занятия позволяют производить поиск и экспериментальную проверку нового содержания, новых методов обучения, в широких пределах варьировать объём сложности изучаемого материала. Программа факультативных занятий должна существенно связывать теоретический материал общего характера с приложениями математики.

Факультативные занятия по математике должны быть использованы для углубления знаний учащихся в области программного материала, развития их логического мышления, пространственного воображения, исследовательских навыков, смекалки, развития правильной математической речи, привития вкуса к чтению математической литературы, для сообщения учащимся сведений из истории математики.

Главное место в осуществлении математического образования, как и во всей педагогической работе в школе, занимает, несомненно, урок. Но и система факультативных занятий дает богатейшие возможности для решения задач математического образования. Факультативные занятия могут быть использованы для предпрофильной подготовки школьников, для ознакомления учащихся с применением математики на практике, для привития учащимся конструктивных навыков, навыков в моделировании и т.д.

На факультативных занятиях могут использоваться разнообразные формы проведения занятий. Учитывая возрастные особенности учащихся, нами рекомендуются комбинированные занятия, занятия-практикумы, семинары, проекты, доклады, лабораторные работы. На занятиях-практикумах проводится целенаправленная работа по выработке у учащихся умений и навыков решения основных типов задач. Семинарские занятия посвящены повторению, углублению и обобщению пройденного материала.

По своим дидактическим целям они служат также приобретению новых знаний, обучению самостоятельному применению знаний в нестандартных ситуациях. Полезная форма работы - подготовка докладов, выполнение различных проектов. Выполнение таких заданий важно прежде всего в отношении развития навыков самообразования, удовлетворение индивидуальных интересов учеников.

Рекомендации по организации факультативных занятий

1)В начале первого занятия учителю нужно кратко обрисовать учащимся перспективу всей работы факультатива, рассказать об основных вопросах, которыми будут заниматься учащиеся на занятиях. Обязательно нужно сформулировать основные требования для учащихся, критерии оценки результатов работы учащихся.

2)Материал каждого занятия должен быть доступен, понятен и интересен учащимся. Учитель заранее подбирает и продумывает список задач и вопросов для занятия, располагает их в определенной последовательности.

3)Важным для формирования устойчивого интереса учащихся к изучению математики обеспечить взаимосвязь (по содержанию) уроков и факультативных занятий. Один из эффективных приёмов - это показ новых идей и методов в действии, в применении к задачам, которые “программными” методами решаются гораздо сложнее.

4)Процесс обучения должен строиться как совместная исследовательская деятельность учащихся — математическая истина (определённое правило, теорема, свойство) не сообщается ученикам “в готовом виде”, а открывается ими самими. Этот процесс начинается с наблюдений, высказывания догадок, суждений о возможном способе решения, о возможном содержании теоремы, правила), после чего следует проверка, поиски дедуктивного обоснования выводов, обобщение, анализ прикладных возможностей. Исследовательская или проблемная структура изучения математики хорошо отвечает развивающим целям обучения при факультативной форме занятий. Без определённой подготовки надеяться включить учащихся в успешную многоэтапную творческую поисковую деятельность нереально. Этот успех надо готовить.

5)На факультативных занятиях можно использовать такую форму работы как небольшое сообщение учителя или ученика по одному какому-либо сравнительно узкому вопросу («десятиминутка»). Темой «десятиминутки» может быть: интересный факт биографии какого-либо выдающегося математика; интересный факт из истории математики; прием рационального вычисления; софизмы; математические фокусы; сообщение о какой-нибудь математической книге, журнале; краткое изложение какого-нибудь интересного математического вопроса. Обычно «десятиминутка» проводится в конце занятия, когда учащиеся уже несколько устали. По содержанию она не обязательно связана с занятием.

6)Другие формы работы с учащимися на факультативном занятии – проекты, исследовательские работы. Метод проектов и учебные исследования позволяют сделать учеников восприимчивыми к науке, дать им сознательное научное направление, поселить в них любовь к самостоятельным занятиям. Как бы поднимаясь по ступенькам интеллектуальной активности и самостоятельности, ученик проходит путь от восприятия готовой учебной информации через воспроизведение полученных знаний и освоенных способов деятельности, к овладению методами научного познания, к самостоятельному и в идеале – творческому их применению.

3.Примерное учебно-тематическое планирование факультативного курса в 8-9 классах

№	**Наименование разделов и дисциплин**	**Всего часов**
	8 класс	
1.	**Арифметика. Математика и окружающий мир.**	**8**
1.1	Различные системы счисления	2
1.2	Решение арифметических задач повышенной трудности	2
1.3	Математика на каждом шагу (решение задач с практическим содержанием)	2
1.4	Замечательные свойства натуральных чисел	2
2.	**Планиметрия**	**8**
2.1	Геометрические упражнения с листком бумаги	2
2.2	Задачи на разрезание и перекраивание фигур	2
2.3	Занимательные задачи на построение	2
2.4	Осевая симметрия	1
2.5	Центральная симметрия на плоскости	1
3.	**Алгебра**	**10**

3.1	Занимательные и исторические задачи на составление уравнений	2
3.2	Неопределенные уравнения первой степени	2
3.3	Разложение многочленов на множители	2
3.4	Решение и исследование алгебраических уравнений и систем уравнений	2
3.5	Математический турнир	2
4.	**Графики функций**	**9**
4.1	Линейная функция и ее график	1
4.2	Свойства линейной функции	1
4.3	График квадратичной функции	1
4.4	Графическое решение систем уравнений и квадратных уравнений	1
4.5	Построение, чтение и применение графиков	2
4.6	Защита проектов	2
4.7	Итоговое занятие	1
	9 класс	
1	**Функции**	**10**
1.1	Квадратичная функция	**6**
	Общие свойства квадратичной функции	2
	Квадратичная функция в заданиях с параметрами	4
1.2	Дробно-линейная функция	**4**
2	**Многочлены**	**10**
2.1	Деление многочленов и теорема Безу	2
2.2	Многочлены вида $x^n - a^n$ и $x^{2m-1} + a^{2m-1}$	2
2.3	Формулы Виета	4
2.4	Решение кубических уравнений	2
3	**Планиметрия**	**15**
3.1	Элементы тригонометрии в планиметрии	4
3.2	Пифагоровы треугольники	1

3.3	Теорема Стюарта	2
3.4	Решение треугольников	1
3.5	Олимпиадные задачи на треугольники	2
3.6	Вывод формул площади четырёхугольника	2
3.7	Метод площадей в решении задач	1
3.8	Решение задач ГИА по геометрии	2
Итого		**70**

4.Планируемые результаты

Предполагается, что в результате изучения курса учащиеся овладеют:

- умением математического моделирования при решении задач различной сложности;
- нестандартными методами решений уравнений и систем уравнений
- геометрическими сведениями, которые не только помогут учащимся углубить свои знания по геометрии, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении геометрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к профильному единому экзамену по математике в ее геометрической части;
- навыками решения нестандартных задач, умениями, связанными с работой с научно-популярной и справочной литературой;
- элементами исследовательских процедур, связанных с поиском, отбором, анализом, обобщением собранных данных, представлением результатов самостоятельного микроисследования.

Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей.

5.Основное содержание курса

Факультативный курс математики 8 - 9 классов

«Избранные вопросы математики»

Факультатив 8 класс (35 часов)

1 глава. Арифметика. Математика и окружающий мир (8 часов).

Различные системы счисления. Решение арифметических задач повышенной трудности

Математика на каждом шагу (решение задач с практическим содержанием).

Замечательные свойства натуральных чисел

2 глава. Планиметрия (8 часов).

Геометрические упражнения с листком бумаги. Задачи на разрезание и перекраивание фигур. Занимательные задачи на построение. Осевая симметрия. Центральная симметрия на плоскости

3 глава. Алгебра (10 часов).

Занимательные и исторические задачи на составление уравнений.

Неопределенные уравнения первой степени. Разложение многочленов на множители. Решение и исследование алгебраических уравнений и систем уравнений. Математический турнир

4 глава. Графики функций (9 часов).

Линейная функция и ее график. Свойства линейной функции. График квадратичной функции. Графическое решение систем уравнений и квадратных уравнений. Построение, чтение и применение графиков. Защита проектов. Итоговое занятие

Факультатив 9 класс (35 часов)

1 глава. Функции (10 часов).

Квадратичная функция. *Общие свойства квадратичной функции*.

Квадратичная функция в заданиях с параметрами. Дробно-линейная функция

2 глава. Многочлены (10 часов)

Деление многочленов и теорема Безу. Многочлены вида $x^n - a^n$ и $x^{2m-1} + a^{2m-1}$.

Формулы Виета. Решение кубических уравнений

3 глава. Планиметрия (15 часов).

Элементы тригонометрии в планиметрии. Пифагоровые треугольники. Теорема Стюарта

Решение треугольников. Олимпиадные задачи на треугольники. Вывод формул площади четырёхугольника. Метод площадей в решении задач. Решение задач ГИА по геометрии

Литература

1. Данкова И.Н. и др., *Предпрофильная подготовка учащихся 9 классов по математике: Общие положения, структура портфолио, программа курсов, сценарий занятий.* – М.: «5 за знания», 2006.
2. Алгебра и начала анализа: сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы/ под ред. С.А.Шестакова.– 2-е изд., испр.– М.: Внешсигма-М, 2007.
3. Колягин Ю.М. и др., *Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10 кл. общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни.* М.: Просвещение, 2008.
4. Алимов Ш.А. и др., *Алгебра*-9. – М.: Просвещение, 2008.
5. Безрукова Г.К., Мельникова Н.Б., Шевелёва Н.В. *ГИА – 2009. Экзамен в новой форме. Геометрия. 9 класс.* – М.: АСТ Астрель, 2008.
6. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы 9 класс.* – М.: АСТ Астрель, 2004.
7. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.
8. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.

Методические блоки к главам факультативного курса 8 класса

Различные системы счисления

1. Вводная задача. «Загадочная автобиография» (Другой вариант см. в «Занимательной арифметике» Я.И. Перельмана)

В бумагах одного математика была найдена странная автобиография: «Я окончил школу 33-летним юношей и поступил в том же году в институт, который успешно окончил в возрасте 42 лет. Вместе со своей маленькой сестренкой, которая училась в III классе средней школы и была в возрасте 20 лет, я поехал на учительскую работу. Школа помещалась в 10 км от железной работы. Это расстояние я не спеша, легко преодолевал за 1 час, а на велосипеде даже за каких-нибудь 100 минут. Работа в школе мне давалась легко, нагрузка у меня была небольшая: 100 часов в неделю. Сестра моя училась очень хорошо и через 12 лет окончила десятилетку, будучи еще совсем молоденькой девушкой: Как расшифровать эту странную автобиографию? Задача будет решена позже, после того как мы познакомимся с системами счисления. (Ответ: запись в пятеричной системе счисления.)

2. Рассказ учителя о различных системах счисления, о применении их в настоящее время

При подсчете многих объектов удобно группировать их по нескольку штук. Такая группировка облегчает счет. Поскольку удобно считать на пальцах, предметы часто группируют по 5 или по 10 (впрочем, иногда и по 12 – вспомните слово «дюжина»; иногда и по 7 – в неделе 7 дней)

Система счисления – это способ записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций. В римской системе счисления есть особые знаки: для единицы – I, пяти – V, десяти – X, пятидесяти – L, ста – C, пятисот – D, тысячи – M. Примеры записи чисел в римской системе приведены в таблице. Римская система более или менее пригодна для выполнения операций сложения и вычитания, но совсем не удобна для умножения и деления.

Запись чисел в различных системах счисления.

Десятичная	Римская	Двоичная	Троичная	Четверичная

1	I	1	1	1
2	II	10	2	2
3	III	11	10	3
4	IV	100	11	10
5	V	101	12	11
6	VI	110	20	12
7	VII	111	21	13
8	VIII	1000	22	20
9	IX	1001	100	21
10	X	1010	101	22
11	XI	1011	102	23
12	XII	1100	110	30
13	XIII	1101	111	31
14	XIVI	1110	112	32
15	XVI	1111	120	33
16	XVI	10000	121	100
17	XVII	10001	122	101
18	XVIII	10010	200	102
19	XIX	10011	201	103
20	XX	10100	202	110
21	XXI	10101	210	111
22	XXII	10110	211	112
28	XXVIII	11100	1001	130
48	XLVIII	110000	1210	300
101	CI	1100101	10202	1211
151	CLI	10010111	12121	2113
1966	MCMLXVI	11110101110	2200211	132232
1980	MCMLXXX	11110111100	2201100	132330
1997	MCMXCVII	11111001101	2201222	133031
2000	MM	11111010000	2202002	133100

5000	MMMMM	1001110001000	20212012	1032020

Если в записи положение цифр (знаков) не играет важной роли, то систему счисления называют непозиционной. Непозиционными были системы счисления у древних египтян, греков. У древних вавилонян система счисления вначале тоже была непозиционной, но впоследствии они научились использовать информацию, заключенную в порядке записи цифр, и перешли к позиционной системе счисления. При этом в отличие от используемой нами системы счисления, в которой значение цифры меняется в 10 раз при перемещении на одну позицию, у вавилонян при перемещении знака происходило изменение значения числа в 60 раз. Следы вавилонской системы счисления сохранились до наших дней: в часе – 60 минут, в минуте – 60 секунд.

Долгое время в вавилонской системе счисления не было нуля, то есть знака для «пропущенного» разряда. В IX веке появился особый знак для нуля. Десятичная система распространилась по всему миру.

Например, записывая 2653, мы имеем в виду число $2\cdot10^3+6\cdot10^2+5\cdot10^1+3\cdot10^0$. Особая роль отводится числу десять: все числа представляются в виде суммы различных степеней десяти с коэффициентами, принимающими значения от 0 до 9. Поэтому эта система и называется десятичной. А что будет, если вместо десяти использовать какое-нибудь другое число, например шесть? По аналогии нам потребуется шесть цифр-символов. В качестве их мы можем взять знакомые нам символы 0,1,2,3,4,5, которые будут обозначать числа от нуля до пяти. Число шесть мы примем за единицу следующего разряда, и поэтому в нашей новой системе счисления оно будет записываться так: 10. Продолжая аналогию, мы можем представить любое натуральное число в виде суммы различных степеней шестерки с коэффициентами от нуля до пяти. Например, $7=1\cdot6^1+1\cdot6^0$ или $45=1\cdot6^2+1\cdot6^1+3\cdot6^0$. Поэтому, в новой системе счисления, которая называется шестеричной, естественно записывать число 7_{10} как 11_6, 45_{10} как 113_6 (индекс у числа означает, что это число записано в данной системе счисления).

Нетрудно понять, что в шестеричной системе счисления можно записать любое натуральное число. Покажем, как это сделать для числа 450_{10}. Наибольшее число, являющееся степенью шестерки и не превосходящее 450, - это 216. Разделим 450 на 216 с остатком: $450 = 2 \cdot 216 + 18$.

Неполное частное равно 2. Поэтому первой цифрой шестеричной записи числа 450 будет 2.

Остаток от деления равен 18. Разделим его на предыдущую степень шестерки (на первом этапе мы делили на 6^3, а теперь на 6^2) с остатком: 18= $0 \cdot 36 + 18$. Неполное частное равно 0, поэтому вторая цифра – 0. Остаток равен 18.

Разделим с остатком 18 на 6^1: $18 = 3 \cdot 6 + 0$. Значит, третья цифра равна 3, остаток – 0. Таким образом, последняя цифра равна 0. Итак, $450_{10} = 2030_6$.

При построении новой системы счисления мы не пользовались никакими специфическими свойствами числа 6. Аналогично по любому натуральному числу $n, n > 1$, можно построить n-ичную систему счисления, в которой запись числа связана с его разложением по степеням числа n.

Еще в XVII веке немецкий математик Лейбниц предложил перейти на двоичную систему счисления, но этому помешала не только традиция, но и то, что в двоичной системе счисления запись чисел слишком длинна. Например, $106 = 1101010_2$.

Однако в XX веке, когда были созданы компьютеры, оказалось, что для выполнения арифметических операций на машинах самой удобной является именно двоичная система счисления.

Удобным компромиссом между человеком и машиной являются шестнадцатеричная и восьмеричная системы счисления. Дело в том, что очень легко переводить числа из двоичной системы в любую из них, а по краткости записи восьмеричная система почти такая же, как десятичная, а шестнадцатеричная даже короче.

Операции над натуральными числами в n-ичной системе счисления выполняются в обычном порядке, с той лишь разницей, что для каждой системы счисления надо брать свои таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы счисления таблицы таковы:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

В двоичной системе счисления таблицы сложения и умножения удивительно просты:

0+0=0 $\qquad 0\cdot 0=0$

0+1=1 $\qquad 0\cdot 1=0$

1+1=10 $\qquad 1\cdot 1=1$

Пользуясь этими таблицами, легко складывать и вычитать:

10+11=101, 111+101+1100, 101+11=10, 110110011+10111=111001010.

Эти примеры в десятичной системе выглядят следующим образом:

2+3=5, 7+5=12, 5-3=2, 435+23=458.

Умножаем в двоичной системе:

$11101\cdot 101=10010001,\ 10111011\cdot 1100101=100100111000111,\ 11011\cdot 1101=101011111.$

В десятичной системе эти примеры выглядят так:

$29\cdot 5=145,\ 187\cdot 101=18887,\ 27\cdot 13=351.$

В двоичной системе можно записывать не только целые числа. Например, двоичная запись 101,1010111 в десятичную систему переводится следующим образом:

$$4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=5{,}6796875.$$

3. Решение задач на переход от недесятичной системы счисления к десятичной, и наоборот

1. Запишите в указанной системе счисления

А) $1587=x_2$; Б) $178=x_3$; В) $594=x_6$; Г) $354_6=x_2$; Д) $2531_7=x_6$; Е) $937=x_2$; Ж) $12021001012_3=x_{10}$; З) $2234210_5=x_3$.

2. Выполните действия

А) $2131_4 + 3201_4$; Б) $231342_5 - 42123_5$; В) $254_6 + 342_6$; Г) $32120_4 + 5271_8$;

Д) $425_9 - 723_8$; Е) $320_5 : 32_5$; Ж) $43211_5 : 100_3$; З) $231_7 \cdot 24_6$.

3. Найдите основание системы счисления

А) $43_x = 27$, Б) $324_x = 89$, В) $421_x - 143_x = 234_x$; Г) $53_x \cdot 16_x = 880_x$

4. «Странная семья». У меня 100 братьев, младшему 1000 лет, а старшему 1111 лет. Старший учится в 1001 классе. Что это за семья?

5. Запишите число 111_{10} в одиннадцатеричной системе счисления (в качестве недостающей цифры 10 принято использовать букву А).

6. Запишите число 1110100111_2 в шестнадцатеричной системе счисления (в качестве недостающих цифр от 10 до 15 принято использовать буквы А, В, С, D, E, F).

4. Фокусы, связанные с различными системами счисления.

Угадывание предмета по таблицам

Ведущий. Вы видите перед собой различные геометрические фигуры и инструменты. В этой таблице выписаны все их названия.

1. Куб.
2. Шар.
3. Окружность.
4. Круг.
5. Линейка.
6. Циркуль.
7. Цилиндр.
8. Треугольник.
9. Квадрат.
10. Параллелограмм.
11. Сегмент.
12. Транспортир.
13. Сектор.
14. Пирамида.
15. Трапеция.

Они же выписаны в этих четырех таблицах.

Таблица №1	Таблица №2	Таблица №3	Таблица №4
Куб Сектор Трапеция Сегмент Окружность	Шар Окружность Цилиндр Циркуль Трапеция	Круг Линейка Циркуль Сектор Транспортир	Треугольник Трапеция Сектор Пирамида Транспортир

Линейка Цилиндр Квадрат	Пирамида Сегмент Параллелограмм	Трапеция Пирамида Цилиндр	Квадрат Параллелограмм Сегмент

Можете выбрать любой из этих предметов так, чтобы я не видел. Я берусь с помощью несложных расчетов установить, какой предмет вы выбрали. Кто желает проделать этот фокус?

К доске идет ученик М.

Ведущий отворачивается так, что видит только таблицу, в которой 15 названий, но не видит ни остальных таблиц, ни самих предметов. Затем он продолжает: «Выбери, М., любой из предметов на столе. Подними его так, чтобы видели все, кроме меня. Записан ли этот предмет, в таблице № 1?» - «Да». «А в таблице №2?» - «Нет». – «А в таблице № 3?» - «Да». – «А в таблице №4?» - «Нет».

Ведущий. Я угадываю: ты выбрал линейку.

Объяснение. Каждому предмету соответствует определенное число – номер, под которым название предмета значится в таблице с 15 предметами. Например, сектору соответствует число 13, линейке – число 5. Переведем все эти номера в двоичную систему счисления. Тогда каждое из чисел записывается не более чем четырьмя цифрами. Например, число 14 запишется как 1110, число 5 запишется как 101 или (что то же) 0101.

Таблицы составлены так. В первой таблице помещаются такие, и только такие слова, чьи номера в двоичной системе счисления имеют на первом месте 1. Например, слову «сектор» соответствует число 13, в двоичной системе счисления 1101; на первом месте справа – 1; поэтому мы это слово помещаем в таблицу №1. В таблицу № 2 помещаем те слова, чьи номера в двоичной системе счисления имеют на втором месте (считая справа налево) цифру 1. Например, слово «цилиндр» входит под номером 7, то есть в двоичном разложении под номером 111. Вторая справа с конца – 1. Мы поэтому слово «цилиндр» включаем в таблицу №2. Аналогично составлены таблицы № 3 и № 4. Например, в таблице № 4 помещаются те слова, в чьих номерах (в двоичной записи) на четвертом месте (считая справо налево) стоит 1. Когда М. говорит, что выбранный им предмет имеется в таблице № 1 и № 3, но не значится в таблицах № 2 и № 4, я могу записать номер этого предмета в двоичной системе счисления: 0101; или в десятичной системе счисления $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$, то есть 5. Под номером 5 в таблице из 15 предметов значится слово «линейка». Значит, М. выбрал линейку.

Угадывание любого целого числа от 1 до 31 с помощью двоичной системы счисления

Пусть этот фокус проводят два ученика – А и Б.

Б выходит из комнаты, А вызывает к столу 5 учеников (кто желает) и выстраивает их в один ряд. Затем он предлагает присутствующим в комнате называть любое число от 1 до 31. В уме он переводит число в двоичную систему счисления и расставляет учащихся так, чтобы нулю соответствовал ученик, стоящий лицом к присутствующим, а единице – ученик, стоящий несколько боком к аудитории. Например, если предложено число 13, то в двоичной системе счисления оно запишется так: 1101 или (что то же) 01101. Затем А уходит в сторону (или вовсе выходит из комнаты). Приглашают Б, и он, посмотрев на пятерку учеников, восстанавливает в уме по их расположению загаданное число (сначала в двоичной системе, а затем переводит в десятичную). Можно видоизменить этот эффектный фокус, например, ставить вместо нулей и единиц мальчиков и девочек или вместо нуля книгу лицевой стороной, а вместо единицы ставить книгу задней обложкой к зрителю.

5. Дополнительные задачи

1. Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может быть квадратом натурального числа в десятичной системе счисления.

2. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массы m разделен на две части. В каком случае общая цена двух частей будет наименьшей?

3. За 3,5 часа работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей, а скорость выполнения работы на третьем прессе относится к скорости выполнения работы на втором прессе как 6:5. За сколько времени будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?

4. Средняя линия трапеции равна 20 см и делит площадь трапеции в отношении как 2:3. Найдите длины оснований трапеции.

Ответы:

1. А)$1587 = 3063_8 = 11000110011_2$; Б)$178 = 2012 \cdot 1_3$; В) $594 = 2430_6$; Г)$354_6 = 10001110_2$; Д)$2531_7 = 12425_6$; Е) $937 = 1110101001_2$; Ж) $12021001012_3 = 103550$; З) $2234210_5 = 39930 = 2000202220_3$.

2. Г) 11100101001 $_2$ Д) -170_8 Е) 10_5 Ж) 309 З) $231_7 \cdot 24_6 = 120 \cdot 28 = 3360$.

3. А) $x = 6$; Б) $x = 5$ В) $x = 6$ Г) $x = 9$.

4. Числа записаны в двоичной системе. В семье четыре брата. Младшему 8 лет, а старшему 15 лет, он учится в 9 классе.

Дополнительные задачи

1. Пусть трехзначное число будет $\overline{abc}$, а разность d. Тогда $d = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c) = 9 \cdot 11(a - c)$. Так как $(a - c) < 11$, то $d \neq n^2$.

2. Пусть масса первой части будет $\frac{m}{2} + x$. Тогда масса второй части $\frac{m}{2} - x$. Цена первой части $a\left(\frac{m}{2} + x\right)^2$, цена второй части $a\left(\frac{m}{2} - x\right)^2$, цена двух частей бриллианте равна $a\left(\frac{m}{2} + x\right)^2 + a\left(\frac{m}{2} - x\right)^2 = a\left(\frac{m^2}{2} + 2x^2\right)$. Она будет наименьшей при $x = 0$, то есть, когда бриллиант разделят на две равные части.

3. Найдем время выполнения заказа каждым прессом:

$3{,}5 : 0{,}42 = 8\frac{1}{3}(÷), 9 : 0{,}6 = 15(÷); 15 : x = 6 : 5$, где x – время выполнения заказа третьим прессом. Значит, $x = 12{,}5$ (ч). Искомое время равно $1 : \left(\frac{1}{8\frac{1}{3}} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12{,}5}\right) = 3\frac{3}{4}(÷)$.

4. 12 см и 28 см.

6. Примеры устных упражнений

1. Вычислить устно: А) $34 \cdot 48 + 18 \cdot 12 + 23 \cdot 24$ Б) $\frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120}$ В) $195 \cdot 6$

Г) $63 + 29$ Д) $\left(4\frac{1}{5} - 6\frac{4}{5} + 3{,}6\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$.

2. Тане не хватает 2 руб. для покупки 8 воздушных шаров. Если она купит 5 шаров, то у нее останется 10 рублей. Сколько стоит шар? (Ответ: 4 рубля)

3. В семье пять братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье? (Ответ: 6)

4. Три землекопа за 2 ч вырыли 3 ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 часов?

(Ответ: за 2 часа 6 землекопов выроют 6 ям, за 5 часов – в 2,5 раза больше, то есть 15 ям)

5. Один восьмиклассник о себе писал так: «Пальцев у меня 24, на каждой руке 5, а на ногах 12». Как же так могло быть? (Ответ: ученик воспользовался восьмеричной системой счисления: $24_8 = 2 \cdot 8 + 4 = 20_{10}$, $12_8 = 1 \cdot 8 + 2 = 10_{10}$.)

6. Решите уравнение $|x - 2008| = 2009$.

7. Можно ли расставить 10 стульев вдоль стен квадратной комнаты так, чтобы возле каждой стены было поровну стульев? (Ответ: Можно. Надо поставить по стулу в два противоположных угла комнаты и, кроме этого, по два стула у каждой стены.)

7. Пример «десятиминутки»

Как умножить в уме два двузначных числа, близких к 100?

$94 \cdot 97 = 9118$

Как я произвела умножение?

Я узнаю, каков недостаток первого сомножителя (94) до 100. Это будет 6. Недостаток второго сомножителя (97) до 100 равен 3. Затем я из одного сомножителя (94) вычитаю недостаток (3) второго сомножителя до 100; получаю 91. Приписываю к результату произведение $3 \cdot 6$, то есть 18.

Значит, $94 \cdot 97 = 9118$

6 3

Я пользуюсь правилом: если надо перемножить два двузначных числа, близких к 100, то можно поступать так: найти недостатки сомножителей до сотни; вычесть из одного сомножителя недостаток второго до сотни; к результату приписать двумя цифрами произведение недостатков сомножителей до сотни.

Возьмем другой пример: $98 \cdot 86 = 8428$

2 14

А почему можно так умножать числа? Ответ на этот вопрос дает алгебра.

Пусть нужно перемножить двузначные числа x и y, близкие к 100.

$x = 100 - a$, где $a -$ недостаток числа x до 100. $y = 100 - b$.

$x \cdot y = (100-a)(100-b) = (100-a) \cdot 100 - 100b + ab = (100-a-b) \cdot 100 + ab = (x-b) \cdot 100 + ab$

Итак, в произведении всего $x - b$ сотен и, кроме того, еще ab единиц. Отсюда и вытекает наше правило. Оно наиболее удобно, если a и b меньше 25.

Предложите теперь два трехзначных числа, близких к 1000.

$997 \cdot 936 = 933192$

3 64

Учащимся предлагается сформулировать и доказать самим дома правило для умножения трехзначных чисел, близких к 1000.

<u>**Неопределенные уравнения первой степени**</u>

Самые разные задачи практического содержания часто приводят к уравнениям, в которых неизвестные по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения. Уравнения в целых числах рассматривались еще в глубокой древности. Особенно много ими занимался александрийский математик Диофант, имя которого и носят уравнения в целых числах. Простейшим примером диофантова уравнения служит линейное уравнение $ax+by=c$ в целых числах (естественно с целыми коэффициентами a,b,c). Оно может быть решено разными способами.

Пусть a,b,c - ненулевые целые числа. Уравнение $ax+by=c$ в целых числах не имеет решений, если число с не делится на наибольший общий делитель пары чисел a,b.

Задача 1. Можно ли набрать сумму в 1000 рублей с помощью купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей, 100 рублей таким образом, чтобы всего было использовано ровно 40 купюр?

Решение.

Если сумму в 1000 рублей можно набрать с помощью x,y,z купюр достоинством в 1 рубль, 10 рублей, 100 рублей соответственно, то справедливо равенство $x+10y+100z=1000$. Если, к тому же, всего купюр должно быть $x+y+z=40$, то целые числа y,z должны удовлетворять уравнению $(40-y-z)+10y+100z=1000$, или $9y+99z=960$. Так как число 960 не делится на наибольший общий делитель пары чисел 9 и 99, равный 9, то уравнение не имеет решений.

Ответ: нельзя.

Задача 2. Затруднение кладовщика.

На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $16x+17y+40z=140$ в целых неотрицательных числах.

Заметим, что число y не может быть равным 0, так как иначе уравнение $16x+40z=140$ в целых числах имело бы решение, что противоречило бы утверждению задачи (ибо число 140 не делится на число 8 (наибольший общий делитель чисел 16 и 40). Далее, число x также не может быть равным 0, так как иначе было бы выполнено равенство $17y = 140 - 40z = 10(14 - 4z)$ и неотрицательное число $14 - 4z$ делилось бы на 17 прицелом неотрицательном значении z, что невозможно. Наконец, число z также не может быть равным 0, так как иначе из равенства $17y = 140 - 16x = 4(35 - 4x)$ следовало бы, что число $35 - 4x$ кратно 17 при $x > 0$, что невозможно.

Таким образом, числа x, y, z должны быть положительными, а числа $x' = x - 1$, $y' = y - 1, z' = z - 1$- целыми неотрицательными, удовлетворяющими уравнению $16x' + 17y' + 40z' = 67.$

Аналогичные рассуждения показывают, что $y' \neq 0, x' \neq 0,$ то есть числа $x'' = x' - 1$ и $y'' = y' - 1$ должны удовлетворять уравнению $16x'' + 17y'' + 40z' = 34,$ в целых неотрицательных числах, которое имеет единственное решение $x'' = 0, y'' = 2, z' = 0.$ Таким образом, возвращаясь к исходным неизвестным, мы получаем единственное решение первоначального уравнения $x = 2, y = 4, z = 1$, то есть 140 кг гвоздей можно отпустить только с помощью 2 ящиков по 16 кг, 4 ящиков по 17 кг и 1 ящика в 40 кг.

Задача 3. Состав с углем.

На станцию привезли 420 т угля в вагонах вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т. Сколько каких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

Решение.

Пусть было использовано x, y, z вагонов вместимостью по 15 т, по 20 т и по 25 т соответственно. Тогда имеем $15x + 20y + 25z = 420$, $x + y + z = 27$, то есть числа y, z должны удовлетворять уравнению $15(27 - y - z) + 20y + 25z = 420$в натуральных числах. Преобразовывая это уравнение, получаем $y + 2z = 3$, то есть $y = z = 1$ и $x = 25$. Итак, было использовано 25 вагонов по 15 т, 1 вагон в 20 т и 1 вагон в 25 т.

Общее решение.

Пусть пара чисел $x = x_0$, $y = y_0$ удовлетворяют уравнению $ax + by = c$ в целых числах с взаимно простыми коэффициентами a,b. Докажем, что формулы $x = x_0 + bk, y = y_0 - ak$ с целым параметром k задают все решения этого уравнения.

Доказательство.

Если пара чисел x, y наряду с парой чисел x_0, y_0 удовлетворяет уравнению $ax + by = c$ в целых числах с взаимно простыми коэффициентами a,b, то имеем $ax + by = ax_0 + by_0$, откуда $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Так как число $x - x_0 = \dfrac{b(y_0 - y)}{a}$ является целым, а числа a,b не имеют общих делителей, то число $k = \dfrac{y_0 - y}{a}$ также является целым. Поэтому $x - x_0 = bk$ и $y - y_0 = ak$, откуда получаем равенства $x = x_0 + bk, y = y_0 - ak$.

Мы доказали, что любое решение уравнения задается указанными формулами. С другой стороны, при любом целом значении k имеем $a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = ax_0 + by_0 = c$, то есть ничего кроме решений эти формулы не задают.

Задача 4. Сколько нужно мешков?

Для перевозки зерна имеются мешки, в которые входит либо 60 кг, либо 80 кг зерна. Сколько надо заготовить тех и других мешков для загрузки 1 т зерна таким образом, чтобы все мешки были полными? Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?

Решение.

$60x + 80y = 1000$ или $3x + 4y = 50$.

Одно целочисленное решение этого уравнения нетрудно угадать $x = -50, y = 50$.

Учитывая формулы общего решения, получаем: $x = -50 + 4k, y = 50 - 3k$.

Теперь для того, чтобы найти все натуральные решения, наложим ограничения $4k - 50 \geq 0, \quad 50 - 3k \geq 0,$ из которых выведем оценки $12 < k < 17$.

Таким образом, полагая последовательно $k=13, 14, 15, 16$, найдем все неотрицательные решения:

$x_1=2, y_1=11; \quad x_2=6, y_2=8; \quad x_3=10, y_3=5; \quad x_4=14, y_4=2.$

Наименьшее количество мешков $x+y=13$ достигается при первом из найденных решений.

Дополнительные задачи.

1. У продавца имеются 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахарного песка за один раз, используя для взвешивания наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?

Ответ: продавец должен на одну чашку весов положить 6 банок, а на другую 2 гирьки и взвешиваемый сахар. Весы уравновесятся, если сахара будет 2,5 кг.

2. Решите в целых неотрицательных числах уравнения: $2x-246y=345$; $69x-91y=1996$.

3. Решите уравнения в целых числах: $5x+8y=29$; $89x-144y=1$; $7x+4y-9z=89$.

4. При каких натуральных n число $8n+3$ делится на 13?

5. Мой брат купил несколько одинаковых ручек. Каждая ручка стоили 13 рублей. Брат имел деньги достоинством только в 5 рублей. Уплатил он все свои деньги (у него было больше 200 рублей, но меньше 300 рублей), и продавец дал ему сдачи 1 рубль. Сколько ручек купил брат?

Устные упражнения

1. Встретилась необходимость устно перемножить числа 85 и 95. Укажите 2-3 удобных способа для умножения «в уме» этих чисел.

2. Вычислить $99-97+95-93+\ldots+3-1$. Ответ: 50

3. Правильная или неправильная дробь: $\frac{244\cdot 395-151}{244+395\cdot 243}$?

4. Множимое увеличили на 20%, а множитель уменьшили на 20%. Как изменится произведение? (Уменьшилось на 4%)

5. После того как пешеход прошел 1 км и половину оставшегося пути, ему еще осталось пройти треть всего пути и один километр. Чему равен весь путь? Ответ: 9 км.

6. Существуют ли треугольники, у которых один из углов равен разности двух других углов? Ответ: прямоугольные треугольники, так как если $\angle 1 = \angle 2 - \angle 3$, то есть $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$. Но $\angle 2 = 180^0 - (\angle 1 + \angle 3)$ или $\angle 2 = 180^0 - \angle 2$, то есть $\angle 2$ - прямой.

Пример «десятиминутки»

Как возвести в квадрат число, близкое к 50?

Назовите любое число, близкое к 50, но большее, чем 50?

Например, 58. $58^2 = 3364$. Как я так быстро и устно произвела вычисления?

Объясним смысл выражения: приписать к данному числу a двумя цифрами другое данное число b. Это означает: умножить число a на 100 и к тому, что получится, прибавить число b.

Пусть мне нужно возвести в квадрат число x, близкое к 50, но большее 50. Число это запишем так: $x = 50 + a$, где a - избыток числа x над 50.

Например: 58=50+8, $x = 58, a = 8$.

Итак, $x = 50 + a, a = x - 50$.

$$x^2 = (50 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2 = (25 + a) \cdot 100 + a^2 = (25 + x - 50) \cdot 100 + a^2 = (x - 25) \cdot 100 + a^2$$

Итак, если возводим в квадрат число x, то в результате сотен будет $x - 25$. И, кроме того, еще a^2 единиц.

Отсюда следует правило: если требуется возвести в квадрат число, близкое к 50, но большее 50, то можно поступить так: 1) вычесть из этого числа 25, 2) приписать к результату двумя цифрами квадрат избытка данного числа над 50.

Примеры: $58^2 = 3364$

Объяснение. $58 - 25 = 33$, $8^2 = 64$, $58^2 = 3364$.

Ученикам предлагается самостоятельно придумать прием возведения в квадрат чисел, близких к 50, но меньших 50 (или чисел, близких к 500).

<u>Геометрические упражнения с листом бумаги</u>

Среди множества возможных действий с бумагой особое место занимает операция ее перегибания. Одним из достоинств этой операции является то, что ее можно производить, не имея под рукой никаких дополнительных инструментов – ни линейки, ни циркуля, ни даже карандаша. Этим вы, конечно, неоднократно пользовались, когда складывали из бумаги пилотку, кораблик и т.п.

Практические свойства бумаги порождают своеобразную геометрию, с элементами которой мы и познакомимся. Роль линий в этой геометрии будут играть края листа и складки, образующиеся при его перегибаниях, а роль точек – вершины углов листа и точки пересечения складок друг с другом или с краями листа. Оказывается, возможности операции перегибаний листа очень велики. То, что они включают в себя всю геометрию одной линейки, не вызывает сомнений. Но они в определенной степени таят в себе также и возможности циркуля, хотя и не позволяют проводить непосредственно дуги окружности.

Заметим, что при реальной работе с бумагой нужно учитывать следующие обстоятельства. Если складывать лист бумаги в несколько раз, то сами складки получаются все менее и менее четкими из-за того, что настоящая бумага имеет некоторую, пусть незначительную, но ненулевую толщину. Этот эффект иногда начинает проявляться уже при втором перегибании. Следовательно, решая задачи на нашем занятии, мы должны складывать бумагу по возможности в меньшее число раз. Будем искать более экономные пути решения. Для решения задач необходимо обеспечить всех учащихся индивидуальными листами глянцевой цветной бумаги (на лицевой и оборотной сторонах – разные цвета).

Задача 1. Середина отрезка.

На листе бумаги отмечены две точки A и B. Как с помощью перегибаний этого листа разделить отрезок AB пополам?

Обычно бумагу перегибают следующим образом: одну часть листа накладывают на другую, и прижав их друг к другу в определенном месте одной рукой, разглаживают оба листа другой рукой до образования складки. Если при этом некоторые две точки А и В бумаги оказались прижатыми друг к другу, то любая точка С складки будет равноудалена от точек А и В, так как отрезки АС и ВС после разглаживания окажутся прижатыми друг к другу. Поскольку множество таких точек С совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку АВ, то полученная складка будет прямой линией. Итак, мы перегибаем лист бумаги по прямой линии так, чтобы сами точки остались на видимой стороне бумаги после перегибания. Тогда, прижав друг к дугу точки А и В неразвернутого листа и разгладив этот лист, мы получим искомую точку С на прямой АВ, равноудаленную от точек А и В.

Задача 2. Перпендикуляр к прямой.

Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку?

Задача 3. Параллельная прямая.

Как с помощью перегибаний листа бумаги провести прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку?

Проведем сначала перпендикуляр к данной прямой, а потом проведем перпендикуляр к полученной прямой, проходящей через данную точку. Последняя прямая будет параллельна данной, так как обе они перпендикулярны одной и той же прямой.

Задача 4. Центр круга.

Как с помощью перегибаний найти центр вырезанного из бумаги круга? Можно ли найти центр круга, нарисованного на непрозрачной бумаге?

Если круг вырезан из бумаги, то, перегнув его пополам по некоторому диаметру АВ (для этого нужно, чтобы при наложении две полуокружности, совместились друг с другом), а затем перегнув лист еще раз так, чтобы совместились точки А и В, мы получим центр О круга.

Если же круг нарисован на непрозрачной бумаге, то перегнем лист по какой-нибудь хорде и по серединному перпендикуляру АВ к ней, а затем найдем середину О этого перпендикуляра. Точка О будет центром круга, так как АВ – его диаметр.

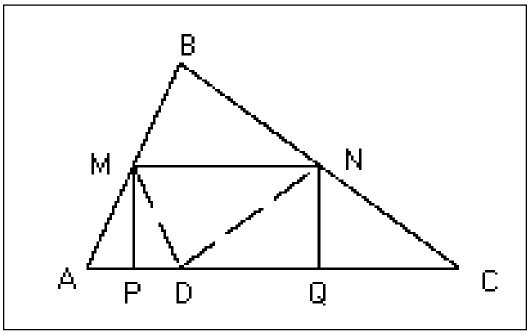
Задача 5. Построения в треугольнике.

Из бумаги вырезан треугольник. Укажите как с помощью перегибаний найти следующие линии и точки этого треугольника: биссектрису данного угла; высоту, опущенную из данной вершины (если углы при двух других вершинах острые); медиану, проведенную к данной стороне.

Для построения биссектрисы угла А треугольника АВС перегнем лист бумаги так, чтобы сторона АВ пошла по стороне АС. Тогда линия сгиба будет осью симметрии угла ВАС, то есть его биссектрисой.

Задача 6. Сумма углов треугольника.

С помощью перегибаний произвольного бумажного треугольника продемонстрируйте тот факт, что сумма углов при его вершинах равна 180^0.



Идея доказательства ясна из рисунка. АС – большая сторона треугольника, MN – средняя линия, $MP \perp AC, NQ \perp AC$. Перегнем треугольник по MN, MP, NQ. В новом положении 3 угла у вершины D образуют развернутый угол.

Задача 7. Из прямоугольника квадрат.

Из бумаги вырезан прямоугольник. Получите из него квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника.

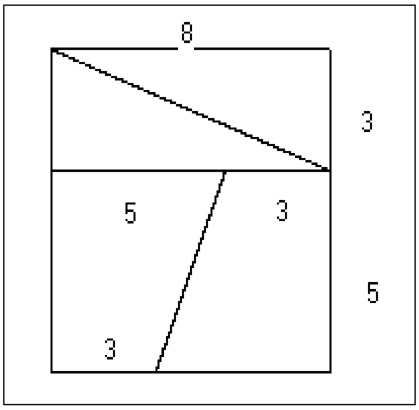
Перегнем прямоугольный лист бумаги по биссектрисе одного из его углов BAD, то есть так чтобы сторона AB прямоугольника ABCD пошла по соседней с ней стороне AD, а линия сгиба пересекла какую-то третью сторону в точке E (см. рисунок). Пусть меньшая сторона AB оказалась наложенной сверху на большую сторону AD. Тогда, перегнув нижнюю часть листа вдоль линии BE, мы получим квадрат ABEF. Действительно, в четырехугольнике ABEF выполнены равенства $\angle ABE = \angle BAF = 90^0$, $AB = BE$ (ибо $\angle BAE = 45^0 = \angle AEB$),

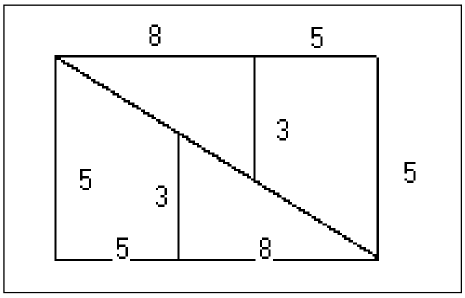
$AB = AF, BE = EF$, следовательно, все стороны этого четырехугольника равны, а углы прямые.

Задача 8. Парадокс с разрезанием ковра.

Один фокусник (имя его за давностью забылось) нашел способ, как разрезать квадратный ковер на четыре части, а затем сложить из этих частей прямоугольный ковер большей площади.

Способ этот такой: разобьем каждую сторону квадрата на 8 равных частей, проведем прямые линии, как указано на рисунке и разрежем по ним квадрат на 4 части. Затем сложим эти части так, как показано на следующем рисунке, получим прямоугольный ковер. Площадь прямоугольного ковра больше площади квадратного ковра, так как $13 \cdot 5 = 65$, а $8 \cdot 8 = 64$. В чем же дело? Почему увеличилась площадь?





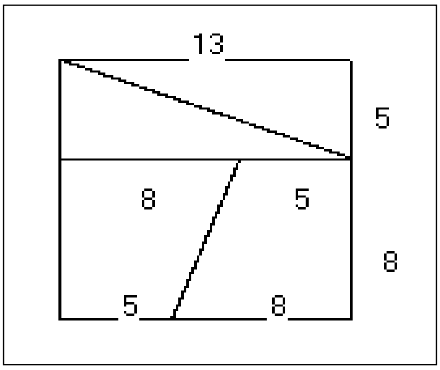
Вы сможете ответить на этот вопрос самостоятельно, если нарисуете большой квадрат (чем больше, тем лучше), разрежете его по «выкройке» и сложите по следующей «выкройке».

Подобные парадоксы с разрезанием квадрата или прямоугольника и связанные с этим математические задачи рассмотрены в книгах Мартина Гарднера «А ну-ка догадайся» и «Математические головоломки».

Проект по использованию решения задачи - парадокса о разрезании ковра (для наиболее подготовленных учащихся).

1. Выполнив указание к решению парадокса о разрезании ковра, вы обнаружите, что в ковре, составленном по выкройке второго рисунка, есть «дыра». Можно ли утверждать, что «дыра» имеет форму параллелограмма?

2. Можете ли вы предложить аналогичную выкройку для ковра 13·13(м^2), так, чтобы площади исходного ковра и вновь сложенного отличались на 1 м^2?



Ответ: Вот выкройка для ковра 13м×13м. Размеры нового ковра будут 21м×8м, его площадь 168 м^2, а площадь исходного 169 м^2.

Пример «десятиминутки»

Математические софизмы.

1. $2 \cdot 2 = 5!$

Пусть имеем два числа $a = 4, b = 5$. Обозначим их полусумму через d; $d = \frac{a+b}{2}$; $a + b = 2d$, так что $a = 2d - b, 2d - a = b.$

Умножим последние два равенства почленно; тогда $2d \cdot a - a^2 = 2d \cdot b - b^2$.

Умножим обе части равенства на -1. Получим: $a^2 - 2da = b^2 - 2db$.

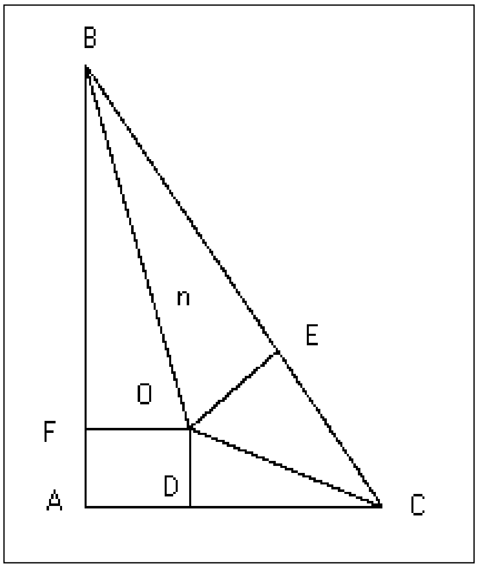
Прибавим к обеим частям по d^2, тогда получим: $a^2 - 2da + d^2 = b^2 - 2db + d^2$, то есть $(a-d)^2 = (b-d)^2$.

Следовательно, $a - d = b - d$, отсюда $a = b$; но $a = 4, b = 5$, значит, $4 = 5$, то есть $2 \cdot 2 = 5$, что и требовалось доказать.

2. Спичка вдвое длиннее телеграфного столба! «Каждый скажет, что телеграфный столб, конечно, длиннее спички. А я берусь доказать, что каждая спичка длиннее телеграфного столба и притом ровно вдвое!

Действительно, пусть a- длина спички (в дециметрах), b- длина столба (в дециметрах). Обозначим $b - a$ через c, так что $b - a = c, b = a + c$. Перемножим эти равенства почленно. Получим: $b^2 - ab = ca + c^2$. Вычтем из обеих частей bc. Получим $b^2 - ab - bc = ca + c^2 - bc$, $b(b - a - c) = c(a + c - b)$, $b(b - a - c) = -c(b - a - c)$.

Отсюда $b=-c,$ но $c=b-a$, так что $-c=a-b.$ Таким образом, $b=a-b, a=2b$. Но что такое a? Длина спички. А b? Длина столба. Итак: спичка вдвое длиннее телеграфного столба, что и требовалось доказать!»



3. Катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе!

Пусть BO- биссектриса угла B, D- середина катета AC, $DO \perp AC, OE \perp BC, OF \perp BA$. Так как O на биссектрисе угла B, то $OF=OE$. ΔBFO = ΔBEO (по гипотенузе и катету). Поэтому $BF = BE$ (1).

Далее, $OA=OC$, ибо каждая точка перпендикуляра к отрезку AC, проходящего через се

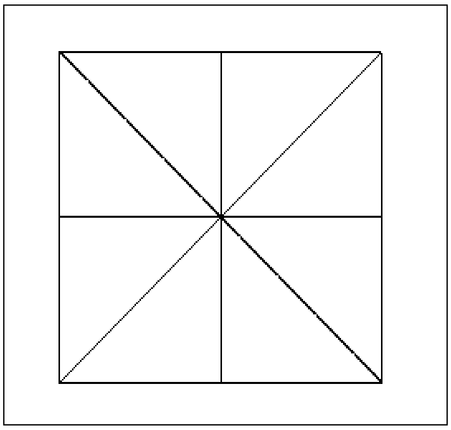
редину AC, равноудалена от A и C. Так как $OF=OE$, то, $\Delta AOF = \Delta COE$ и поэтому $AF=CE$ (2). Складывая почленно (1) и (2), получим $AB=CB$, то есть катет равен гипотенузе, что и требовалось доказать.

Объяснение. Обычно кто-либо из учащихся догадывается, что точка O не может быть внутри ΔABC. Тогда нужно показать, что если O вне ΔABC или на его стороне, то опять $AB=CB$. Именно, показываем, что $BF = BE$, $AF = CE$. Отсюда $AB=CB$.

Оба случая невозможны, что и доказывается полученным противоречием (на самом деле F вне отрезка BA, а E на отрезке BC).

Аналогично «доказывается» софизм: «Все треугольники равнобедренные».

Устные упражнения.



1.Сколько вы видите на рисунке квадратов, треугольников, трапеций?

2. Андрей живет на пятом этаже, а Костя живет в том же доме вдвое выше, чем Андрей. На каком этаже живет Костя?

3. Вычислите: $26\frac{2}{3}\%$ от 30.

4. Вычислите: $\frac{1}{a-3}+2+\frac{1}{3-a}-\frac{2a-2}{a}$, если $a=0{,}01$.

5. Что больше: $\frac{99}{100}$ или $\frac{100}{101}$; $\frac{18}{115}$ или $\frac{90}{573}$?

6. Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью 30 км в час, вторую – со скоростью 60 км в час. Какова его средняя скорость?

7. Могут ли стороны пятиугольника быть равными 1 м, 2 м, 4 м, 8 м, 16 м?

Математический фокус.

Задумай однозначное число, удвой его, прибавь 1, умножь на 5, вычти 2, прибавь 301, зачеркни среднюю цифру, к остатку прибавь 3. Ты получил 37.

Объяснение.

Последовательно выполненные операции можно записать формулой.

x - задуманное число.

$(2x+1)\cdot 5-2+301=3\cdot 100+10x+4=\overline{3x4}$.

Первая цифра 3, вторая x, третья 4. Если зачеркнуть среднюю, то получим 34. 34+3=37. В данном примере после того, как зачеркивается неизвестная цифра x, отгадчик уже знает, что его товарищ, задумавший число, написал 34. После этого он может с полученным числом производить любые операции. Например, прибавить 3, отнять 17, умножить на 2 и т.д. Результат все равно ему будет известен.

Придумать самим учащимся такие фокусы не составит труда. Например,

1. x - любое число.

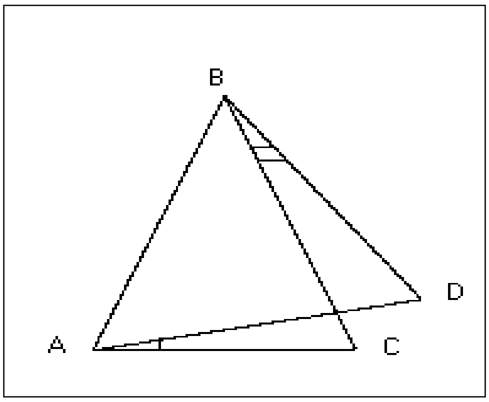
$((x+273+8-31+350-x+200)\div 4)\cdot 3=600$

2. $((x+11)\cdot 2-20)\cdot 5-10x=10$

3. $\frac{x+x+12}{2}-x+3=9$

Дополнительные задачи

1. Треугольник ABC-равнобедренный, $AB=BC$; треугольник ABD также равнобедренный, $AB=AD$, $\angle DAC=10^0$, $\angle DBC=20^0$. Найдите длину BD, если $AB=a$.



Решение.

1) Обозначим $\angle D=\alpha$; ΔABD-равнобедренный, $AB=AD$, значит $\angle D=\angle ABD$ и $\angle ABC=\alpha-20^0$.

2) Сумма углов треугольника равна 180^0, поэтому $\angle BAD=180^0-2\alpha$.

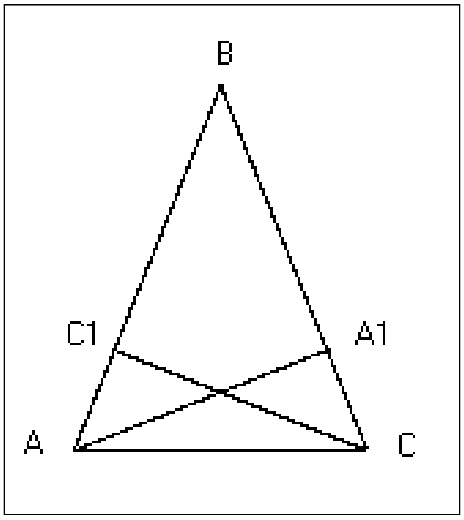
3) Треугольник ABC равнобедренный, $AB=BC$, значит $\angle BAC=\angle BCA$, но $\angle BAC=\angle BAD+10^0=190^0-2\alpha$. Сумма углов этого треугольника равна 180^0, поэтому $2(190^0-\alpha)+\alpha-20^0=180^0$, откуда $\alpha=60^0$.

4) В равнобедренном треугольнике ABD, в котором $\angle B=\angle D$, угол D равен 60^0. Отсюда следует, что этот треугольник правильный, все его стороны равны. Итак, $BD=AB=a$.

2. Высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC равны между собой. Доказать, что треугольник равнобедренный, $AB=BC$. Найти периметр этого треугольника, если $AC=5$ и $AA_1=4$.

Решение.

1) Прямоугольные треугольники C_1AC и A_1CA равны, у них общая гипотенуза AC и равные катеты $CC_1 = AA_1$. Из равенства этих треугольников следует равенство углов C_1AC и A_1CA. Это означает, что в треугольнике ABC углы,



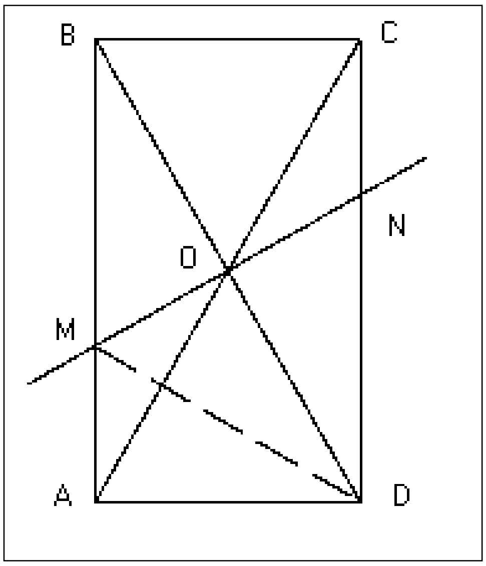
прилежащие к стороне AC равны между собой. Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный, $AB = BC$.

2) Если $AC = 5, AA_1 = 4$, то $A_1C = \sqrt{AC^2 - AA_1^2} = 3$.

3) Пусть $AB = x$, тогда $BC = x$, $BA_1 = x - 3$. Из прямоугольного треугольника ABA_1 имеем $AB^2 = BA_1^2 + AA_1^2$, то есть $x^2 = (x-3)^2 + 4^2$. Находим $x = \frac{25}{6}$.

4) Вычисляем периметр треугольника ABC: $P = 2AB + AC = 2x + AC = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

3. Через середину диагонали BD прямоугольника $ABCD$ проведена



перпендикулярная ей прямая, она пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD в точке N. Известно, что $AB = a$ и $BM = 2AM$. Найти длину отрезка MN и периметр прямоугольника $ABCD$.

Решение.

1) $\Delta AMO = \Delta CNO$, так как $\angle AOM = \angle CNO$ (как вертикальные) $\angle OAM = \angle OCN$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC) и $AO = OC$ (диагонали прямоугольника, пересекаясь, делятся пополам). Из равенства этих треугольников следует $MO = ON, MO = \frac{1}{2}MN$.

2) Из $BO = OD$ следует, что $\Delta BOM = \Delta DOM$ (катет OM - общий и равны катеты BO и OD), тогда $BM = MD$.

3) $AB = a, AM = \frac{a}{3}, BM = \frac{2}{3}a.$ Как установили, $MD = BM$, то есть $DM = \frac{2}{3}a$. Из прямоугольного треугольника AMD находим $AD = \sqrt{MD^2 - AM^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

4) Из прямоугольного треугольника ABD находим $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

5) $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{\sqrt{3}}$, из прямоугольного треугольника BOM находим $MO = \sqrt{BM^2 - BO^2} = \frac{a}{3}$, поэтому $MN = 2MO = \frac{2}{3}a$.

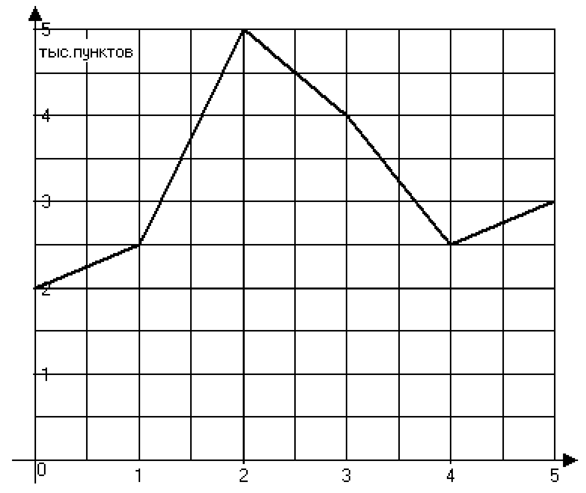
6) Вычисляем периметр прямоугольника $ABCD$ $P = 2(AB + AD) = 2\left(a + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

Построение, чтение и применение графиков

График – «говорящая линия», которая может многое рассказать.

Подготовительное задание.

1. На графике показано, как в течение недели колебался курс акций компании А на торгах. По горизонтальной оси отмечены дни, а по вертикальной – курс акций в тысячах пунктов в течение дня.



1-Понедельник, 2-Вторник,3-Среда,4-Четверг,5-Пятница

Таблица: 6 элементов(а)

1) Каким был курс акций к открытию торгов в пятницу?

2) В какие дни курс акций падал?

А) Понедельник, вторник, пятница

Б) Вторник, среда

В) Среда, четверг, пятница

Г) Среда, четверг

3) В какой день торги закончились самым большим курсом акций?

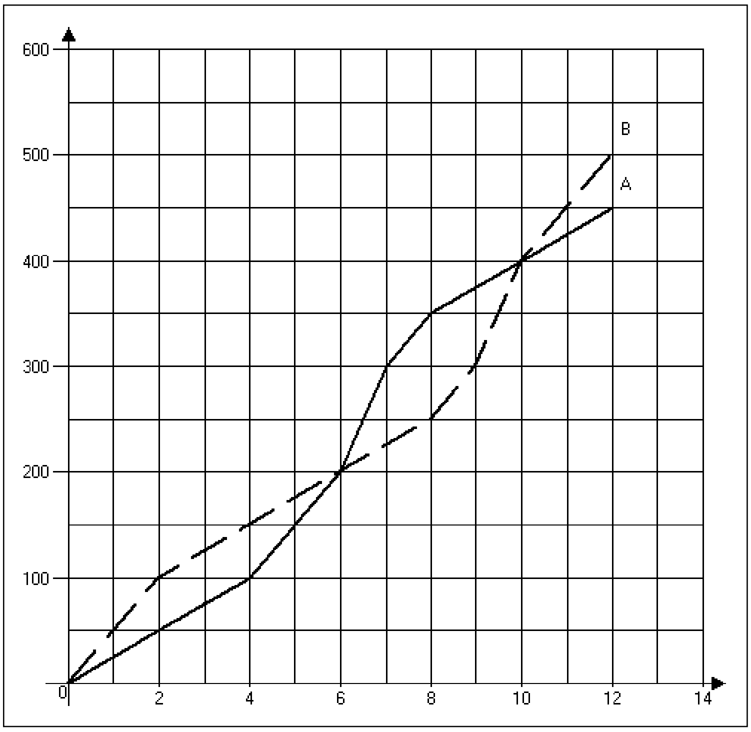
А) В понедельник Б) Во вторник В) В среду Г) В четверг

4) За какой день курс акций изменился больше всего?

А) За вторник Б) За среду В) За четверг Г) За пятницу

5) На сколько пунктов вырос курс акций за первые три дня недели?

Задача 1



Фирма начала продавать две новые модели телефонов – А и В. На графиках показано, как росло в течение года количество проданных телефонов (По горизонтальной оси откладывается время, прошедшее с начала продаж, в месяцах; по вертикальной – число телефонов, проданных с начала продаж, в тыс. шт.). Сколько всего телефонов этих двух моделей было продано за первые десять месяцев?

Предостережение. По такому графику можно задать много вопросов – отвечайте на поставленный вопрос.

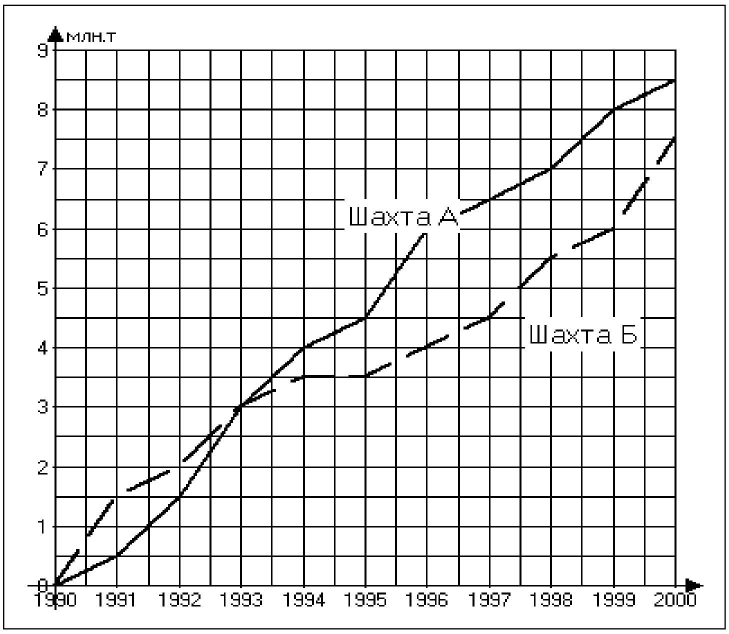
Совет. Если нужно, то проведите вертикальные прямые через указанные точки горизонтальной оси. Обязательно получатся точки пересечения, расположенные в вершинах квадратиков. Не забывайте о единице измерения по вертикальной оси. Прочитав графики, внимательно прочитайте вопрос задания и дайте ответ на поставленный вопрос.

Решение.

Телефонов модели А за первые 10 месяцев продано 400 тыс. штук. Телефонов модели В за первые 10 месяцев продано 400 тыс. штук. Тогда за 10 месяцев телефонов моделей А и В продано 800 тыс. штук.

Задача 2.

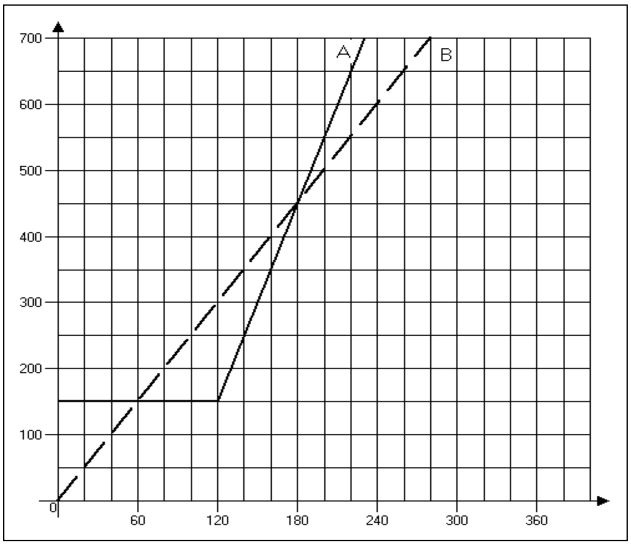
На графике показано, сколько угля добыли шахты А и Б с 1990 по 2000 года. По горизонтальной оси отмечены годы, а по вертикальной – количество угля, добытое шахтой с 1990 года, в миллионах тонн.



1) Сколько миллионов тонн угля было добыто на шахте Б за 1997 год?
2) Сколько тысяч тонн угля было добыто на шахте А за 1995 и 1996 годы?
3) Сколько миллионов тонн угля было добыто на двух шахтах вместе, начиная с 1991 по 1992 годы?
4) За сколько лет после 1990 года шахта Б добыла 6 миллионов тонн угля?
5) В каком году шахта Б добыла меньше всего угля за год?

Задача 3.

Компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф А и тариф В. Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически. На сколько минут хватит 250 рублей, если используется тариф А? Сколько придется заплатить за 140 минут разговора, если используется тариф В? Сколько придется заплатить за 40 минут разговора, если используется тариф А? На сколько минут хватит 300 рублей, если используется тариф В?



Ось абсцисс – продолжительность, мин.

Ось ординат – стоимость разговоров, руб.

Задача 4.

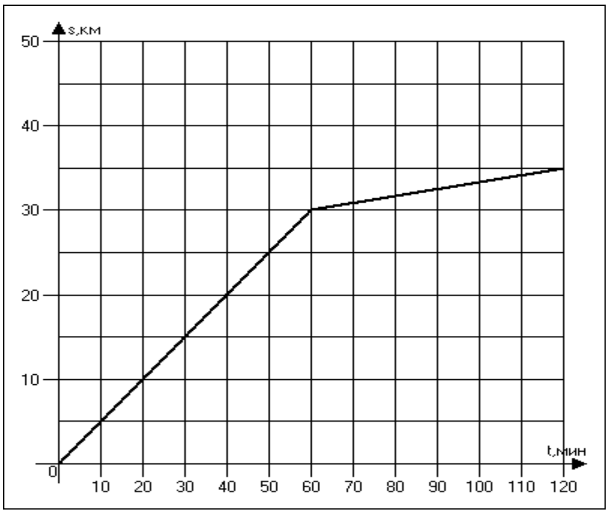


График описывает движение парусной яхты, которая первую часть пути прошла под парусом. Спустив парус, она продолжила движение.

1) Найдите скорость яхты «под парусом» и «без паруса» (выразив ее в км/ч).
2) На каком расстоянии от начала движения находилась яхта через 50 минут, через 2 часа?
3) Сколько времени потребуется яхте на обратный путь, если она будет двигаться с той же скоростью, что и на первом участке «под парусом»?

Решение.

1) Под парусом яхта прошла 30 км за 60 мин, т.е. за 1 час, значит ее скорость была 30 км/ч. Без паруса яхта прошла 5 км за 60 минут, значит ее скорость была 5 км/ч.

   Ответ: скорость яхты «под парусом» 30 км/ч, скорость яхты «без паруса» 5 км/ч.

2) На графике найдем точку с абсциссой, равной 50. Найдем ординату этой точки. Она равна 25. Получили, что за 50 минут яхта пройдет 25 км. Аналогично, за 120 минут – 35 км.

   Ответ: за 50 минут яхта пройдет 25 км, за 120 минут -35 км.

3) Обратный путь составляет 35 км. Скорость яхты 30 км/ч. Найдем время обратного пути: $t = \frac{S}{V} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$ ч, что составляет 1 час 10 минут.

Ответ: 1 ч 10 мин

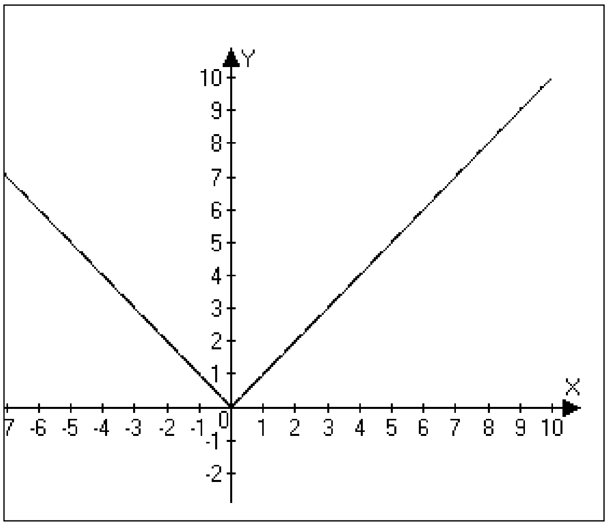
Задача 5.

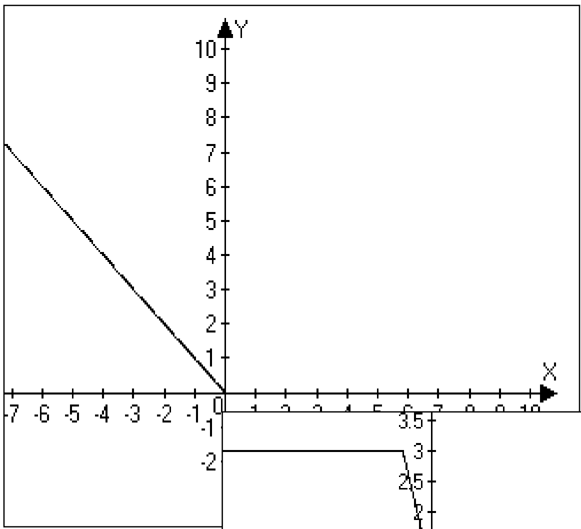
Построить графики функций:

А) $y = \sqrt{x^2}$; Б) $y = \left(-\sqrt{-x}\right)^2$; В) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$; Г) $y = \sqrt{|x-1|}$.

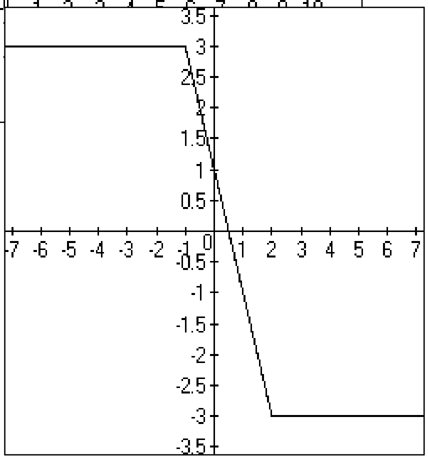
Решение.

А) Из определения квадратного корня следует, что $\sqrt{x^2} = |x|$.





Б) Функция определена при $x \le 0$, $y = -x$.



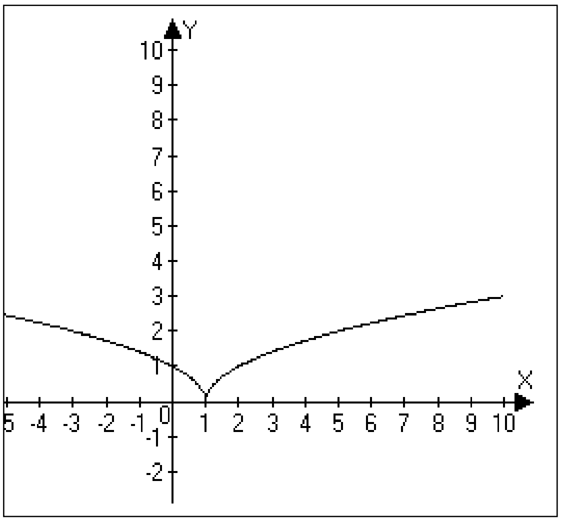
В) $y = \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x-2| - |x+1|$.

При $x \le -1$ функция $y = -x + 2 + x + 1 = 3$.

При $x \in (-1;2)$ функция $y = 2 - x - x - 1 = 1 - 2x$.

При $x \ge 2$ функция $y = x - 2 - x - 1 = -3$.

Г) Функция определена для всех х. При х = 1 значение функции равно 0.



Дополнительные задачи.

1. Построить графики функций:

А) $y = -\sqrt{|x|}$; Б) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; В) $y = \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}}{|x|}$.

2. Решите уравнения:

А) $(x^2+5x+3)(x^2+5x+1)=63$, Б) $\frac{x^2-3bx+x+2b^2-2b}{x^2-7x+6}=0$, В) $\left|x-\sqrt{x}-2\right|+\left|\sqrt{x}+6-x\right|=8$

3. Бассейн наполняется тремя насосами за 3 часа, причем первый насос производительнее второго вдвое. Если бассейн наполнять двумя насосами: сначала на ½ объема первым и третьим насосами, а затем на ½ объема вторым и третьим, то он наполнится за 5 часов. За какое время бассейн наполнится, если будет работать только третий насос?

4. Исследуйте, сколько решений имеет уравнение $\left|\left|\left|x-1\right|-1\right|-1\right|=a$ при различных значениях параметра a.

5. Задача Пуассона. Известному французскому математику Пуассону в юности предложили задачу. Заинтересовавшись ею, Пуассон затем увлекся математикой и посвятил этой науке всю свою жизнь. Вот эта задача.

Некто имеет 12 пинт вина (пинта – мера объема) и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда: один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается: каким образом налить 6 пинт вина в сосуд в 8 пинт?

Пример проекта «Кусочно-линейная функция»

1. Постройте последовательно графики следующих функций:

А) $y=|x+1|$

Б) $y=|x+1|+|x|$

В) $y=|x+1|+|x|+|x-2|$

Г) $y=|x+1|+|x|+|x-2|+|x-3|$

2. Графики построенных функций являются ломаными. Их крайние (бесконечные) звенья симметричны относительно некоторой оси. Найдите эту ось для каждого из графиков.
3. Чем отличаются друг от друга ломаные – графики функций, имеющие четное и нечетное число звеньев?
4. В каких точках функции принимают наименьшее значение? Вычислите эти значения.

5. Рассмотрим аналогичную функцию с нечетным числом угловых точек графика (вершин ломаной):

$y = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| + |x - a_5|, (a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5).$

А) В какой точке функция принимает наименьшее значение?

Б) Чему равно наименьшее значение функции?

В) Относительно какой оси симметричны крайние звенья графика?

6. Рассмотрим функцию с четным числом угловых точек графика: $y = |x - a_1| + \ldots + |x - a_6|, (a_1 < a_2 < \ldots < a_6).$

А) На каком промежутке функция постоянна?

Б) Чему равно наименьшее значение функции?

В) Относительно какой оси симметричны крайние звенья графика?

7. Предложите обобщение предложенных задач.

<u>Пример проекта «Парабола»</u>

Дана парабола $y = x^2$ и две лежащие на ней точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$.

1. Докажите, что угловой коэффициент прямой A_1A_2 равен $x_1 + x_2$.

2. Пусть прямая, параллельная прямой A_1A_2, пересекает параболу в точках B_1 и B_2. Докажите, что сумма абсцисс точек A_1 и A_2 равна сумме абсцисс точек B_1 и B_2.

3. Пусть С – точка пересечения прямой A_1A_2 с осью ординат. Вычислите ординату точки С.

4. Пусть прямая, проходящая через точку С, пересекает параболу в точках C_1 и C_2. Докажите, что произведение абсцисс точек A_1 и A_2 равно произведению абсцисс точек C_1 и C_2.

5. Пусть $A(x_0; y_0)$- точка параболы с абсциссой $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Докажите, что уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой A_1A_2, может быть записано в виде $y + y_0 = 2xx_0$.

6. Докажите, что прямая, построенная в предыдущем задании имеет единственную точку пересечения с параболой (эта прямая является касательной к параболе в точке A).

Устные упражнения

1. Между цифрами 1 2 3 4 5 6, не меняя их порядка, расставьте знаки + и – так, чтобы получилась единица. Ответ: 1+2+3-4+5-6=1.
2. Сколько будет полторы трети от ста? Ответ: 50 (полторы трети $1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$).
3. Указать все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{5}{11}$, но меньше $\frac{6}{11}$. Ответ: $\frac{5}{11}=\frac{75}{165}$; $\frac{6}{11}=\frac{90}{165}$. Чтобы получить дроби со знаменателем 15, выберем в этом промежутке дроби, допускающие сокращение на 11; таких дробей будет две: $\frac{77}{165}$ и $\frac{88}{165}$. Итак, искомые дроби - $\frac{7}{15}$ и $\frac{8}{15}$.
4. Как изменится частное, если из делителя вычесть $\frac{1}{3}$ его? Ответ: новый делитель составляет $\frac{2}{3}$ прежнего, т.е. равен прежнему, умноженному на $\frac{2}{3}$. Значит новое частное равно прежнему, деленному на $\frac{2}{3}$, т.е. увеличится в полтора раза.
5. Задача Эйлера. Решив все свои сбережения поделить поровну между всеми своими сыновьями, некто составил такое завещание. «Старший из моих сыновей должен получить 1000 рублей и $\frac{1}{8}$часть остатка; следующий – 2000 рублей и $\frac{1}{8}$нового остатка; третий сын – 3000 рублей и $\frac{1}{8}$часть третьего остатка и т.д.» Определить число сыновей и размер завещанного сбережения. Ответ: так как все сыновья получили поровну, то $\frac{1}{8}$часть каждого нового остатка была на 1000 рублей меньше $\frac{1}{8}$ части предыдущего остатка, а, значит, весь новый остаток был на 8000 рублей меньше

предыдущего. Так как, по условию, все деньги были поделены полностью, то, когда младший сын получил по завещанию, кроме нескольких тысяч рублей еще $\frac{1}{8}$часть остатка, этого остатка не оказалось. Но тогда предыдущий остаток 8000 рублей. Из него предпоследний сын получил $\frac{1}{8}$ часть, равную 1000 рублей, а остальные 7000 рублей получил младший сын, который таким образом, был седьмым сыном: сыновей было 7, а завещанная сумма $7000 \cdot 7 = 49000$рублей.

Примерные тексты олимпиад

Вариант 1

1. Упростите выражение: $\left(\frac{6}{y^2-9}+\frac{1}{3-y}\right)\frac{y^2+6y+9}{5}$. (3б.)
2. Зная, что $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$, найдите значение выражения: $\frac{n-2m}{m}$. (4б.)
3. Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 60 км/ч, и видит, что мимо окна проходит встречный поезд в течение 4 с. Какова скорость встречного поезда, если его длина равна 120 м? (5 б.)
4. Постройте график функции $y=|x-3|$ (5 б.)
5. Восстановите математическую запись примера: $АННА + ВАЛЯ = 4809$, здесь разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы-одинаковые цифры. (6 б.)
6. Докажите, что биссектрисы внешних углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат. (8 б.)

Вариант 2

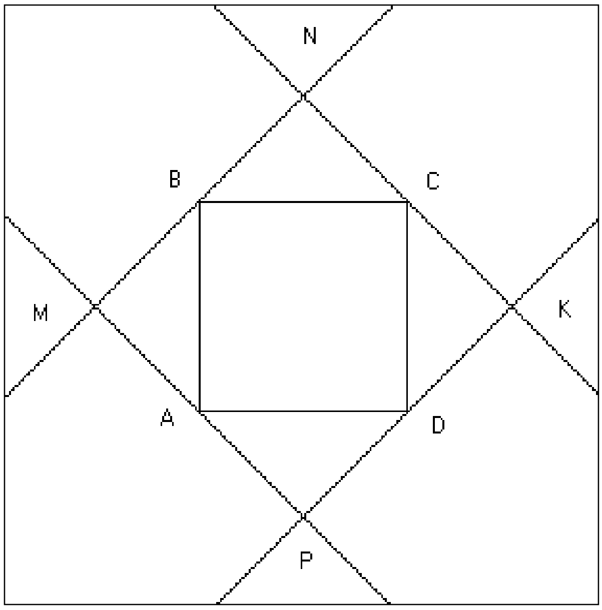
1. Поставьте знаки модуля так, чтобы равенство 1-2-4-8-16=19 стало верным.
2. Постройте график уравнения $(x-1)^2 \cdot y = 0$.
3. Одну овцу лев съедает за 2 дня, волк – за 3 дня, а собака – за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят овцу?

4. Постройте треугольник по данной высоте, углу при основании и медиане, проведенной из этого угла.
5. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.
6. Можно ли разрезать разносторонний треугольник на два равных треугольника?

Ответы:

Вариант 1

1. $-\frac{y+3}{5}$.   2. 1.   3. 48 км/ч   5. 1661+3148=4809



6. Рассмотрим ΔCKD (см. рисунок). Так как CK и DK - биссектрисы внешних углов прямоугольника $ABCD$, то $\angle KDC = \angle KCD = 45^0$, а ΔKCD - равнобедренный и прямоугольный. Примем длины сторон CK и DK за c. Аналогично ΔNBC, ΔPAD, ΔMAB являются равнобедренными и прямоугольными, причем $\Delta NBC = \Delta PAD$, $\Delta KCD = \Delta MAB$. Обозначив длину NC за d, получим, что все стороны прямоугольника $MNKP$ имеют длину $c+d$, поэтому $MNKP$ является квадратом.

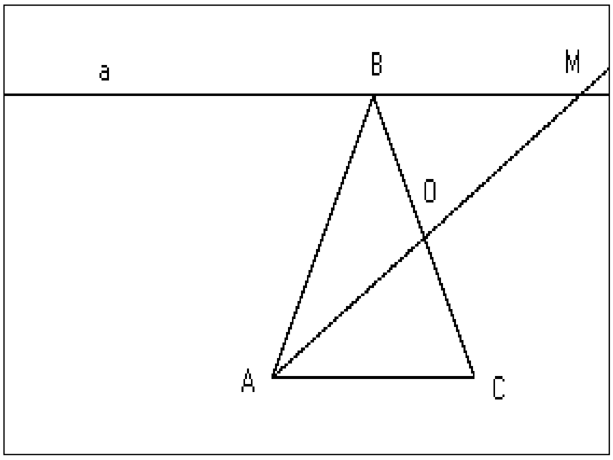
Вариант 2

1. $||1-2|-|4-8|-16| = 19$

2. Графиком уравнения являются две прямые, заданные уравнениями: $y=0$ и $x=1$.

3. Лев съедает за сутки $\frac{1}{2}$ овцы, волк - $\frac{1}{3}$ овцы, собака - $\frac{1}{6}$ овцы. Тогда вместе за сутки они съедят $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ (овцу). Ответ: за один день.

4. План построения.



1) Строим угол A.

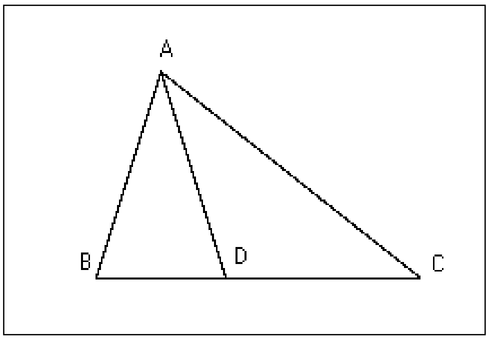
2) Строим множество точек, находящихся на расстоянии, равном данной высоте от основания треугольника (прямую a).

3) Находим точку пересечения данного множества и второй стороны угла - B. Это будет вторая вершина треугольника.

4) Строим окружность с центром в вершине угла и радиусом в 2 раза большим данной медианы. Данная окружность пересечет построенную прямую a в некоторой точке M, принадлежащей внутренней области угла BAC.

5) Соединяем данную точку M с вершиной угла A и делим полученный отрезок AM пополам. Полученную точку O соединяем со второй вершиной треугольника B, продолжаем прямую до пересечения с основанием треугольника и получаем третью вершину треугольника С.

5. Пусть такого класса в школе нет, т.е. во всех классах будет 33 и менее учащихся. Тогда во всей школе будет не более $33\cdot 30=990$ учащихся, что противоречит условию задачи (в школе 1000 учащихся). Значит, наше предположение неверно, поэтому в школе есть класс, в котором не менее 34 учеников.



6. Пусть ΔABC разрезан на два равных треугольника (см. рисунок). Тогда $\angle ADB$ в ΔADB должен быть равен одному из углов ΔADC. Но $\angle ADB$ не может равняться $\angle ACD$ или $\angle CAD$, так как внешний угол треугольника всегда больше внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.

Если же $\angle ADB = \angle ADC$, то $\angle ADB = \angle ADC = 90^0$, значит, AD является высотой. Но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, $AB = AC$, что противоречит тому, что ΔABC разносторонний. Поэтому разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника нельзя.

Примерное содержание математического турнира.

1 тур.

1. Решите уравнение $|x-2009|+|2009-x|=2010$.

2. На птицеферму привезли корм, которого хватило бы уткам на 30 дней, а гусям – на 45 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит привезенного корма и уткам, и гусям вместе.

3. В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков? Объясните, как вы рассуждали.

4. В первый месяц бригада перевыполнила задание на 10%, а во второй – на 20%. На сколько процентов бригада перевыполнила план двух месяцев?

Решение.

1. $2 \cdot |x-2009| = 2010$

$|x-2009| = 1005$

$x = 3014$ или $x = 1004$.

2. За 1 день расходуется уткам $\frac{1}{30}$, гусям - $\frac{1}{45}$ привезенного корма, а всего за один день расходуется $\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{1}{18}$ привезенного корма. Значит, привезенного корма хватит на 18 дней.

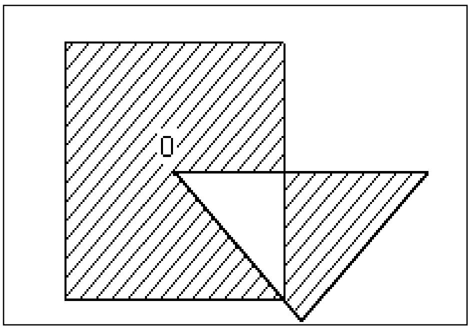
3. Обозначим число послушных девочек ПД, число непослушных мальчиков – НМ. По условию задачи ПД=НМ. Число послушных мальчиков обозначим ПМ. Тогда ПД+ПМ=НМ+ПМ. Это означает, что в классе послушных детей (ПД+ПМ) столько же, сколько мальчиков (НМ+ПМ).

4. Пусть месячное задание составляет a деталей. В первый месяц бригада сделала $1{,}1a$ деталей, во второй - $1{,}2a$ деталей, а за два месяца - $2{,}3a$ деталей.

Задание двух месяцев ($2a$ деталей) бригада перевыполнила на $0,3a$ деталей, или на $\frac{0,3a}{2a}\cdot 100\% = 15\%.$

Ответ: на 15%.

2 тур.



1. Треугольник поворачивают вокруг центра квадрата O. Докажите, что разность площадей закрашенных частей при этом не изменяется.

2. Подряд записывают числа натурального ряда, не разделяя их запятыми:1234567891011121314151617181920… . Какая цифра окажется на 2007 месте?

3. Постройте график функции $y = \frac{3|x-2|}{x-2} + 1$.

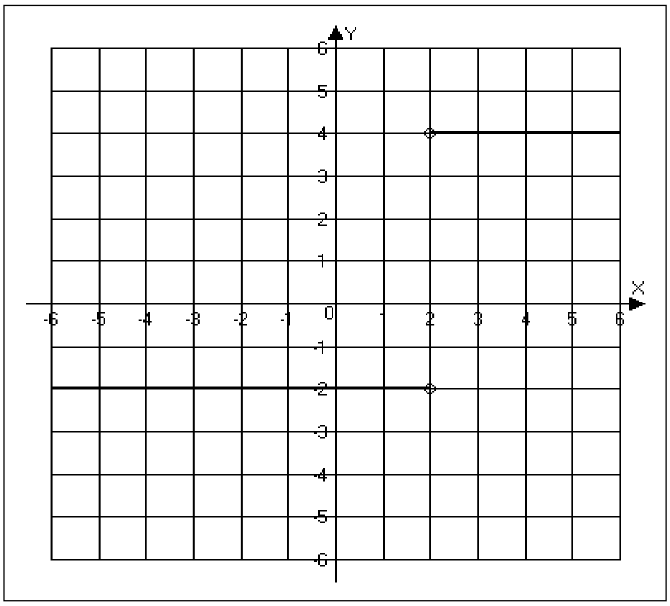
4. Найдите сумму внутренних углов произвольной пятиконечной звезды.

5. Арбуз весил 20 кг и содержал 99% воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98% воды. Сколько теперь весит арбуз?

Решение.

1. Пусть закрашенная часть квадрата имеет площадь S_1, закрашенная часть треугольника имеет площадь S_2, а незакрашенная часть квадрата и треугольника имеет площадь S. Тогда разность закрашенных частей равна $S_1 - S_2 = (S_1 + S) - (S_2 + S)$, то есть равна разности площадей квадрата и треугольника, которая не изменяется при вращении треугольника. Значит, при вращении треугольника разность закрашенных частей не изменяется, что и требовалось доказать.

2. В ряду натуральных чисел 9 однозначных и 90 двузначных чисел, для записи которых использовано $9+2\cdot 90=189$ цифр. Искомая 2007-я цифра стоит на 1818-м месте, если считать от первой цифры первого трехзначного числа (100). Разделим 1818 на 3, получим 606. Это означает, что искомая цифра является третьей цифрой 606-го трехзначного числа, т.е. числа 606+99=705. Ответ: искомая цифра 5.



3. см. рис.

4. Сумма внутренних углов произвольной пятиконечной звезды равна 180^0.

5. Масса «сухого вещества» арбуза составляет 1% первоначальной массы, или $20\cdot 0{,}01=0{,}2$ (кг). После того как арбуз усох, масса «сухого вещества» составляла 2% новой массы арбуза. Найдем эту новую массу $0{,}2:0{,}02=10$ (кг). После того как арбуз усох, его масса уменьшилась вдвое.

Литература

1. Спивак А.В. *Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся* – М.: Просвещение, 2002.
2. Петраков И.С. *Математика для любознательных: Кн. для учащихся 8-11 классов* – М.: Просвещение, 2000.
3. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы 9 класс*. – М.: АСТ Астрель, 2004.
4. *Алгебра. 9 класс. Подготовка к итоговой аттестации* - 2009: Учебно-методическое пособие под редакцией Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону; «Легион», 2008.
5. Рязановский А.Р., Фролова О.В. *Геометрия. 7-9 кл.: Дидактические материалы*. – М.: Дрофа, 1999.
6. Гольдич В.А., Злотин С.Е. *3000 задач по алгебре для 5-9 классов: Учебное пособие*. СПб.: Издательский Дом «Литера», 2001.
7. Ященко И.В., Семенов А.В., Захаров П.И. *Подготовка к экзамену по математике ГИА 9 (новая форма) 2009 г. Методические рекомендации*. – М.: МЦНМО, 2009.

Методические блоки к главам факультативного курса 9 класса

I. ФУНКЦИИ

1.1 Квадратичная функция

Общие свойства квадратичной функции

Квадратичная функция имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$. Основные исследования по ней, решение квадратных уравнений и построение графиков были в программе 8 класса. В рамках 9 класса необходимы некоторые дополнения, не отмеченные в учебнике.

а). Различные варианты записи квадратичной функции имеют вид $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0 = a(x-\alpha)(x-\beta)$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$, α и β – корни.

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $\alpha = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$, $\beta = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$. Полусумма корней даёт абсциссу вершины параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Полуразность в квадрате есть $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \dfrac{D}{4a^2}$. С другой стороны, $y_0 = y(x_0) = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = c - \dfrac{b^2}{4a} = -\dfrac{D}{4a}$. Таким образом, ордината вершины параболы $y_0 = -a \cdot \left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$.

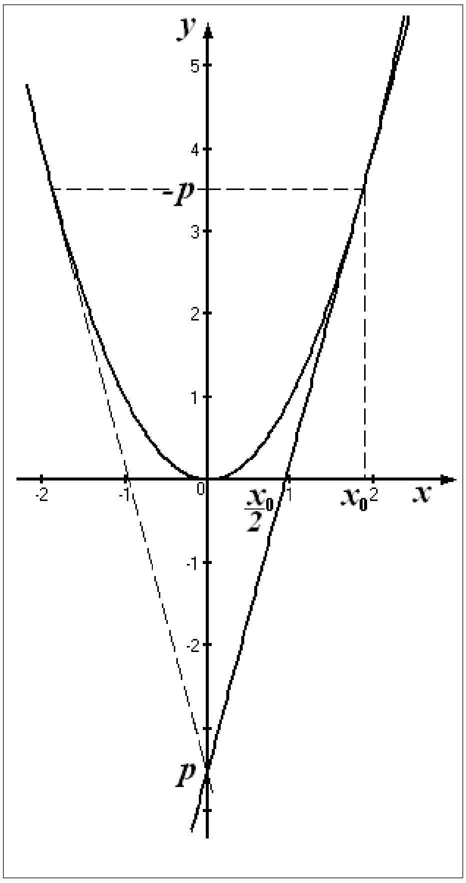


Рис. 1

б). Рассмотрим случай касания прямой $y = kx + p$ с параболой $y = x^2$. Это случай единственного решения уравнения $x^2 - kx - p = 0$. Точки касания имеют следующие координаты: $\left(\dfrac{k}{2};\ \dfrac{k^2}{4} = -p\right)$, где $k = \pm 2\sqrt{-p}$. При заданном значении p возможно простое построение касательных (см. рис.1).

в). В заключение данного теоретического раздела следует вывести каноническую формулу параболы, одной из трёх классических кривых второго порядка.

Напомним определение параболы - это множество точек, каждая из которых равноудалена от заданной точки (фокуса) и заданной прямой (директрисы - направляющей параболы) (рис.2). Из рис.2 следуют равенства: $AB = BF$, $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, $\boxed{y^2 = 2px}$.

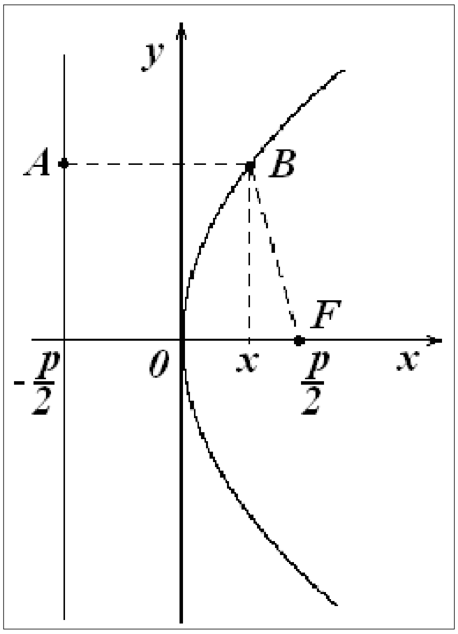


Рис. 2

Последнее и есть каноническое уравнение параболы с параметром *p*, равным расстоянию от фокуса до директрисы. Таким образом, у параболы $y = x^2$ координаты фокуса есть $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$.

Если зеркало представляет собой параболоид вращения, а источник света находится в фокусе параболы, то лучи от источника света после отражения идут параллельным пучком - результат, который был известен еще в средние века арабам, называвшим параболоид “зажигательным зеркалом”.

Квадратичная функция в заданиях с параметрами

Дальнейшие занятия могут быть посвящены заданиям с параметрами. В этот раздел входят следующие основные занятия, связанные с формулами Виета и исследованием квадратичной функции в зависимости от основных характеристик:

- Знаки корней квадратного уравнения;
- Расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от параметра;

- Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции на промежутке.

Эти вопросы хорошо отражены во многих пособиях и учебниках [1]. Ниже приведены задания уровня 9 класса, взятые из сборника задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы [2].

Задачи для самостоятельной работы

1. $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ При каких значениях параметра a корни уравнения разных знаков и каждый из них меньше 4?

2. $f(x) = x^2 + mx + m^2 + 6m$ При каких значениях параметра m $f(x)<0$ при $1 < x < 2$?

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2 - (20a-3)x + 100a^2 - 30a = 0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень

уравнения $x^2 - (8a-7)x + 16a^2 - 28a = 0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень

уравнения $x^2 - (14a-9)x + 49a^2 - 63a + 20 = 0$ меньше 9.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых больший корень

уравнения $x^2 - (14a-3)x + 49a^2 - 21a + 2 = 0$ меньше -8.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2 + 3x + 7a - 21 = 0$ и $x^2 + 6x + 5a - 6 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2 + 4x - 3a + 7 = 0$ и $x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$ имеют хотя бы один общий корень.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения $(x-6a)^2+(x-2a)^2=128$ симметричны относительно точки $x=12$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения уравнения

$(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$.

11. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$9(3x-1)a^2-(21x-19)a+2(x-1)=0$.

12. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$2(4x-1)a^2-(14x-11)a+5(x-1)=0$.

13. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отношение дискриминанта уравнения $bx^2-3x+1=0$ к квадрату разности его корней равно $8b-7$.

14. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отношение дискриминанта уравнения $bx^2+3x+5=0$ к квадрату разности его корней равно $5b+6$.

15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x-2y=5, \\ x^2+4xy+4y^2-18ax-36ay+85a^2+20a+25=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x+5y=-5, \\ x^2+16xy+64y^2-12ax-96ay+45a^2+66a+121=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|4x+9a+5|=|10x+8a-3|$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=5$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|10x+7a-5|=|3x+2a-1|$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=-7$.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 6x-5y+3=0, \\ (2a^2-7a)x-25y=2a^2-9a-50 \end{cases}$ имеет не менее четырёх решение.

20. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 5x-8y-3=0, \\ (5a^2-27a)x+16y=5a^2-32a+6 \end{cases}$ имеет не менее восьми решение.

21. При каких значениях $a \neq -6$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x)=x^2+6x+a^2$ и $g(x)=x^2-ax+36$ больше a^2?

22. При каких значениях $a \neq 4$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x)=x^2+8x+4a^2$ и $g(x)=x^2+2ax+64$ больше a^2?

23. Для каждого значения a решите систему уравнений $\begin{cases} x+7y=2, \\ 3x+y=a, \\ 5x+11y=a^2+3a \end{cases}$.

Для каждого значения a решите систему уравнений $\begin{cases} x+8y=3, \\ 2x+y=a, \\ 5x+16y=a^2+6a \end{cases}$.

24. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2+x^2-2ax \le 36-a^2, \\ (x+2)^2 \le 36, \end{cases}$ равна 18π?

26. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной системой

неравенств $\begin{cases} y^2+x^2-2ax \le 4-a^2, \\ (x+1)^2 \le 25, \end{cases}$ равна 2π?

1.2 Дробно-линейная функция

Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$ называется дробно-линейной функцией. График этой функции есть результат растяжения и параллельного переноса обычной гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. Для построения графика необходимо выделить целую часть этой дроби. Для этого можно разделить уголком числитель на знаменатель или провести следующее преобразование:

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \dfrac{a\left(x+\dfrac{d}{c}+\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}} = y_0 + \dfrac{k}{x-x_0}$. Таким образом, построение графика дробно-линейной функции начинается с нахождения асимптот: горизонтальной $y = y_0$ и вертикальной $x = x_0$. Точки двух ветвей графика легко считаются по исходной формуле. Область определения функции $D(y) = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$, область значений $E(y) = (-\infty, y_0) \cup (y_0, +\infty)$.

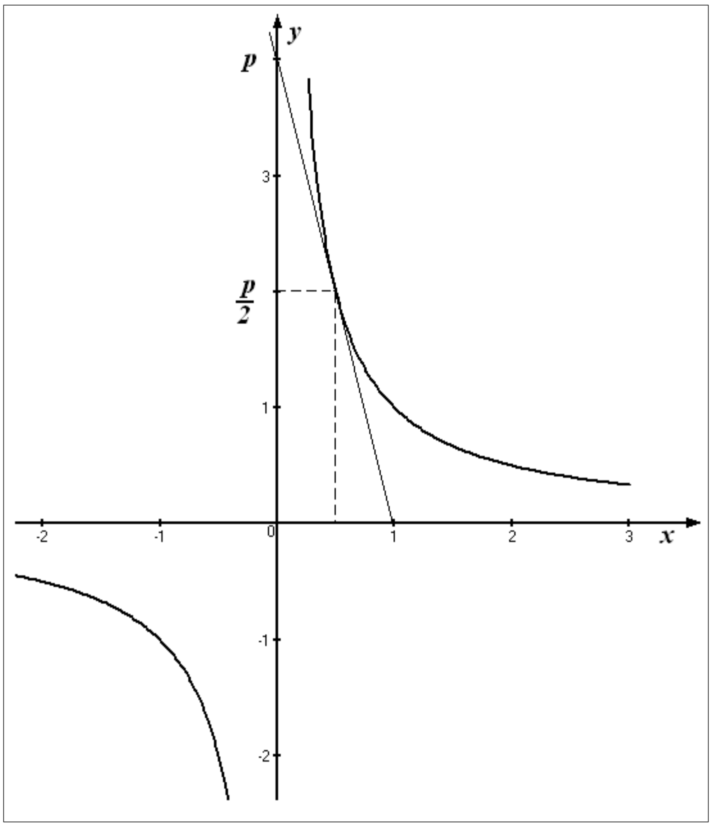


Рис. 3

Рассмотрим касательные к графику функции $y = \dfrac{1}{x}$. Это значит, что уравнение $\dfrac{1}{x} = kx + p$ имеет единственное решение. При заданном значении p имеем из квадратного уравнения $kx^2 + px - 1 = 0$: $k = -\dfrac{p^2}{4}$ и координаты точки касания $\left(\dfrac{2}{p};\ \dfrac{p}{2}\right)$. Отсюда и простой алгоритм проведения касательной к построенной гиперболе (см. рис. 3).

Следует отметить, что площадь отсекаемого касательной от осей координат треугольника постоянна и равна 2.

В дидактических материалах представлены задания на построение графиков дробно-линейной функции.

Задачи для самостоятельной работы

1. Постройте график функции $y=3\cdot\dfrac{4x^2+3x}{4x^3+3x^2}$. Напишите уравнения всех прямых, параллельных оси абсцисс, которые не имеют общих точек с данным графиком.	**2.** Постройте график функции $y=6\cdot\dfrac{4x^2-3x}{4x^3-3x^2}$. Напишите уравнения всех прямых, параллельных оси абсцисс, которые не имеют общих точек с данным графиком.
3. Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает построенный график в единственной точке?	**4.** Постройте график функции $y=-\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}$. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает построенный график в единственной точке?
5. Постройте график функции $y=\dfrac{x+2}{x-\frac{4}{x}}$. При каких значениях a прямая $y=a$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?	**6.** Постройте график функции $y=\dfrac{x-3}{x-\frac{9}{x}}$. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает построенный график в единственной точке?
7. Постройте график функции $y=\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{6+7x-x^3}$. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает построенный график в единственной точке?	**8.** Постройте график функции $y=\dfrac{3x^3-8x^2-x+10}{x^3-2x^2-x+2}$. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает построенный график в единственной точке?
9. Постройте график функции $y=\dfrac{2x^3-16x^2+38x-24}{x^3-7x^2+14x-8}$. При каких значениях a прямая $y=a$ пересекает	**10.** Постройте график функции $y=\dfrac{-x^3-3x^2+x+3}{x^3+6x^2+11x+6}$. При каких значениях a прямая $y=a$

построенный график в единственной точке?	пересекает построенный график в единственной точке?

II. МНОГОЧЛЕНЫ

Данный раздел должен быть логическим продолжением первой главы учебника и, в то же время, уровень сложности должен соответствовать уровню сложности 9 класса общеобразовательной школы (хотя материал может быть взят из 10 класса [3]). Поэтому сюда входят: теорема Безу, формулы Виета для кубической параболы, частные случаи многочленов, формула Кардано.

2.1 Деление многочленов и теорема Безу

Рассмотрим операцию деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $B_m(x)$ ($n > m$). В результате деления, например, уголком, имеем выражение: $\frac{P_n(x)}{B_m(x)} = Q_{n-m}(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{B_m(x)}$ или $P_n(x) = B_m(x) \cdot Q_{n-m}(x) + R_{m-1}(x)$, где $Q_{n-m}(x)$ – неполное частное, а $R_{m-1}(x)$ – остаток. В частном случае двучлена $B_m(x) = x - \alpha$ получаем формулу: $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x-\alpha) + r$, где r – число. Из последней записи следуют некоторые выводы, а именно, теорема Безу:

1. Многочлен $P_n(x)$делится на двучлен $x-\alpha$ тогда и только тогда, когда α является его корнем;

2. Остаток r от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x-\alpha$ равен значению многочлена в точке $x = \alpha$, т.е. $P_n(\alpha) = r$.

Одним из характерных заданий по применению теоремы Безу является следующее: Найти остаток от деления многочлена на произведение $(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$, если остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $x-\alpha$ равен r_1, а остаток от деления на $x-\beta$ равен r_2. Учитывая, что степень остатка должна быть на единицу меньше, чем у делителя, имеем систему равенств:

$$\begin{cases} P_n(x) = Q_1(x)(x-\alpha) + r_1, \\ P_n(x) = Q_2(x)(x-\beta) + r_2, \\ P_n(x) = Q_3(x)(x-\alpha)(x-\beta) + (px+q). \end{cases}$$

Из которой следует, что $\begin{cases} P_n(\alpha) = r_1 = p\alpha + q, \\ P_n(\beta) = r_2 = p\beta + q. \end{cases}$ Таким образом, остаток равен

$R(x) = px + q$, где $p = \dfrac{r_2 - r_1}{\beta - \alpha}, q = \dfrac{r_1\beta - r_2\alpha}{\beta - \alpha}$.

Другой пример, когда деление уголком невозможно провести до конца в силу крайней громоздкости процесса деления. Найти остаток от деления $P(x)$ на $B(x)$, если $P(x) = x^{2010} + x^{2011} + x^{2012}$, а $B(x) = x^2 - 1$.

В этом случае также имеем систему равенств $R(x) = px + q$,

$P(x) = Q(x)(x-1)(x+1) + px + q$ и $\begin{cases} P(1) = p + q = 3 \\ P(-1) = -p + q = 1 \end{cases}$. В результате $R(x) = x + 2$.

2.2 Многочлены вида $x^n - a^n$ и $x^{2m-1} + a^{2m-1}$

Рассмотрим многочлены вида $P_n(x) = x^n - a^n$ и $Q_{2m-1}(x) = x^{2m-1} + a^{2m-1}$. В первом случае имеем $P_n(a) = 0$, во втором $Q_{2m-1}(-a) = 0$. Таким образом, перед нами корни многочленов, а, следовательно, по теореме Безу получаем простейшее разложение на множители: $x^n - a^n = (x-a)\cdot F_{n-1}(x)$, $x^{2m-1} + a^{2m-1} = (x+a)\cdot T_{2m-2}(x)$

Приведенные формулы дают возможность решать ряд задач на делимость, что вполне можно использовать в рамках программы 9 класса общеобразовательной школы, не привлекая метод математической индукции.

Задача 1. Доказать кратность $\left(11^{4n+2} + 12^{2n+1}\right) \vdots\ 133$.

Для этого запишем $11^{4n+2} + 12^{2n+1} = 121^{2n+1} + 12^{2n+1} = 133 \cdot B$, где $B \in Z$. Отсюда, $\left(11^{4n+2} + 12^{2n+1}\right) \vdots\ 133$.

Задача 2. Доказать кратность $\left(3^{3n+2} + 13 \cdot 5^n\right) \vdots\ 22$.

Для этого проведём следующее преобразование: $3^{3n+2} + 13\cdot 5^n = 9\cdot 27^n - 9\cdot 5^n + 22\cdot 5^n = 9\left(27^n - 5^n\right) + 22\cdot 5^n$. Таким образом, выражение имеет вид $\left(9B + 5^n\right)\cdot 22$, где $B \in Z$. Отсюда, $\left(3^{3n+2} + 13\cdot 5^n\right) \vdots\ 22$.

2.3 Формулы Виета

В учебнике 9 класса [4] есть задание на вывод формул Виета для уравнений 3-й степени. Выпишем эти формулы.

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma,$$

откуда $\begin{aligned} a&=-(\alpha+\beta+\gamma),\\ b&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\\ c&=-\alpha\beta\gamma.\end{aligned}$ На эту тему можно подобрать задания, например:

Задача 1. Найти число a и решить уравнение $x^3-3x^2+ax-2=0$ при условии, что сумма квадратов корней уравнения равна 1. Итак, имеем

следующую систему: $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a,.\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.\end{cases}$ Используя то, что

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),$$

получаем $9=1+2a$, откуда $a=4$.

Решаем теперь уравнение $x^3-3x^2+4x-2=0$. Подобрав один из корней $x=1$, произведем деление полинома, стоящего в левой части уравнения, на двучлен $(x-1)$. В результате получаем квадратное уравнение $x^2-2x+2=0$, не имеющее действительных корней.

Следует отметить, что в некоторых заданиях может встретиться сумма кубов корней уравнения. В этом случае из общего уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ нетрудно вывести формулу: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\lambda)+3\alpha\beta\gamma$.

Достаточно записать систему равенств: $\begin{aligned}\alpha^3&=-a\alpha^2-b\alpha-c,\\ \beta^3&=-a\beta^2-b\beta-c,\\ \gamma^3&=-a\gamma^2-b\gamma-c,\end{aligned}$ и сложить их, воспользовавшись формулой, полученной в предыдущем примере.

Задача 2. При каком значении параметра a три действительных корня уравнения

$x^3-9x^2+25x-a=0$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию?

Пусть x, y – первый член и разность арифметической прогрессии соответственно, тогда по формулам Виета имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)=9, \\ x(x+y)+(x+y)(x+2y)+(x+2y)x=25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3, \\ 3x^2+6xy+2y^2=25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3, \\ 3(x+y)^2-y^2=25, \end{cases}$$

откуда $y^2 = 2$. Так как по условию $y > 0$, то $y=\sqrt{2}$, $x=3-\sqrt{2}$, следовательно, $a = x(x + y)(x + 2y) = 21$.

2.4 Решение кубических уравнений

Для многочленов третьей степени существует формула решения уравнений в общем виде, которая практически не используются в школьной практике. Это определённое методическое упущение школьного курса. Дело в том, что с открытием формулы решения уравнения, известной как формулы Кардано, было положено начало расцвету алгебры в 16 веке. С решением кубических уравнений непосредственно связана необходимость введения комплексных чисел.

Итак, пусть кубическое уравнение имеет вид $x^3+ax^2+bx+c=0$. Тогда заменой $x=t-\dfrac{a}{3}$ его сводят к приведённому уравнению $t^3+pt+q=0$. Предположим, корни этого уравнения имеют вид: $t=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$. В этом случае подстановка в уравнение приводит к выражению: $(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})(p+3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta})+\alpha+\beta+q=0$, которое легко становится тождеством, если допустить выполнение следующих условий: $\begin{cases} \alpha+\beta=-q \\ \alpha\beta=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$. Из решения этой системы следует известная формула для корней кубического уравнения: $t=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{Q}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{Q}}$, где $Q=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ – дискриминант кубического уравнения. Так как из анализа формул следует, что уравнение имеет один действительный корень при положительном Q, два действительных корня при равенстве его нулю, а три действительных корня при отрицательном значении Q, то предлагаемые ученикам задания должны соответствовать значениям $Q\geq 0$.

Задача. Решите уравнение $x^3-9x+12=0$.

Имеем $p=-9$ и $q=12$, отсюда дискриминант $Q=9$ и корень уравнения $x=-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$.

Задачи для самостоятельной работы

В заданиях 1- 4 требуется определить значения параметров и корни при заданных условиях

1. $\begin{array}{l} x^3+ax^2+23x+b=0 \\ x_1=-1, x_2=-3. \end{array}$ Найти x_3, *a, b*

2. $\begin{array}{l} 2x^3+mx^2-13x+n=0 \\ x_1=2, x_2=3. \end{array}$ Найти x_3, *m, n*

3. $\begin{array}{l} x^3+ax^2-7x-6=0 \\ x_1=3. \end{array}$ Найти x_2, x_3, *a*

4. $\begin{array}{l} x^3+4x^2+ax-18=0 \\ x_1=-3. \end{array}$ Найти x_2, x_3, *a*

В заданиях 5-10 требуется определить значение параметров, приравняв остаток от деления уголком тождественно к нулю.

5. $(x^3-ax+b)\vdots(x^2-2x+15)$

6. $(x^3+mx+n)\vdots(x^2+3x+10)$

7. $(x^3+ax^2+1)\vdots(x^2+bx-1)$

8. $(x^3+x^2+ax+2)\vdots(x^2+bx+2)$

9. $(x^3-ax^2+2x-1)\vdots(x^2-bx+1)$

10. $(x^3+2x^2-ax+1)\vdots(x^2+bx+1)$

В заданиях 11-14 требуется решить уравнение, подобрав целочисленный корень.

11. $x^3-19x-30=0$ **12.** $x^3-10x^2+23x-14=0$

13. $x^3+9x^2+11x-21=0$ **14.** $x^3+9x^2+23x+15=0$

В заданиях 15-18 требуется решить уравнение, сделав соответствующую замену.

15. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$ **16.** $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$

17. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$

18. $(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2)$

В заданиях 19-22 требуется решить возвратное уравнение, сделав соответствующую замену.

19. $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$

20. $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30=0$

21. $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$

22. $15x^4-16x^3-30x^2+16x+15=0$

В заданиях 23-26 требуется решить уравнение, сделав соответствующую двойную замену.

23. $(x+5)^4-13(x+5)^2x^2+36x^4=0$

24. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

25. $3(x+2)^2+2(x^2-2x+4)^2=5(x^3+8)$

26. $2(x-1)^4-5(x^2-3x+2)^2+2(x-2)^4=0$

Задания 27-36 на применение формул Виета.

27. При каком значении параметра a три действительных корня уравнения $x^3-24x^2+183x+a=0$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию?

28. При каком значении параметра a три действительных корня уравнения $x^3+3x^2-13x-a=0$ образуют убывающую арифметическую прогрессию?

29. Найти число a и решить уравнение $x^3-ax^2+7x-5=0$ при условии, что сумма квадратов корней уравнения равна (-5) и $a>0$.

30. Найти число a и решить уравнение $x^3-x^2+ax-1=0$ при условии, что сумма кубов корней уравнения равна 1.

31. Найти число a и решить уравнение $x^3-x^2+a=0$ при условии, что сумма двух корней уравнения равна 2.

32. Найти число a и решить уравнение $x^3+ax-2=0$ при условии, что произведение двух корней уравнения равно 2.

33. Составить уравнение третьей степени с коэффициентом при x^3, равным 1, корни которого были бы равны квадратам корней уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$.

34. Найти стороны и углы треугольника, периметр которого равен 14, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 3.

35. Найти стороны и углы треугольника, периметр которого равен 18, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 4.

36. Найти стороны и углы треугольника, периметр которого равен 20, радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 5.

В заданиях 37-40 требуется решить уравнение (ср. пример №56, гл.III из учебника [3]). В первом случае, используя формулу Виета, а во втором, решить уравнения без дополнительного условия, сделав соответствующую замену.

37. Решите уравнение $x^3+3\sqrt{3}x^2-28x+10\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух корней равно 2.

38. Решите уравнение $x^3+\sqrt{5}x^2-29x+3\sqrt{5}=0$, если известно, что произведение двух корней равно 1.

39. Решите уравнение $x^3-\sqrt{3}x^2-33x+9\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух корней равно 3.

40. Решите уравнение $x^3-2\sqrt{3}x^2-25x+4\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух корней равно –1.

Ответы

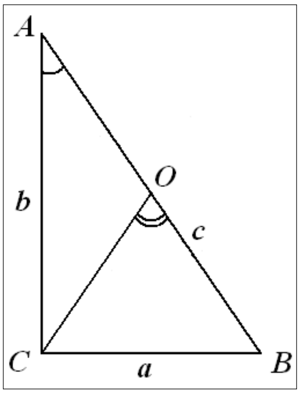
1	$a = 9$; $b = 15$; $x_3 = -5$	**2**	$m = -5$; $n = 30$; $x_3 = -5/2$	**37**	$-5\sqrt{3},\ \sqrt{3}\pm 1$
3	$a = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1$	**4**	$a = -3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$	**38**	$-3\sqrt{5},\ \sqrt{5}\pm 2$
5	$a = -11$; $b = 30$	**6**	$m = 1$; $n = -30$	**39**	$-3\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\pm 3$
7	$a = -2$; $b = -1$	**8**	$a = 2$; $b = 0$	**40**	$4\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\pm 2$
9	$a = 2$; $b = 1$	**10**	$a = -2$; $b = 1$		
11	–3; –2; 5	**12**	1; 2; 7		
13	–7; –3; 1	**14**	–5; –3; –1		
15	3; $3\pm 2\sqrt{5}$	**16**	–4; 2		

17	–1; 0; $(-1\pm\sqrt{5})/2$	**18**	–2; ± 1; 0		
19	2/3; 3/2	**20**	–5/2; –1/3; 2/5; 3		
21	–2; ± 1; 1/2	**22**	± 1; 5/3; –3/5		
23	–5/3; –5/4; 5/2; 5	**24**	–1; –1/2; 2; 4		
25	1; 2; $(7\pm\sqrt{33})/4$	**26**	$\pm\sqrt{2}$; $3\pm\sqrt{2}$		
27	÷ 5; 8; 11; $a = -440$	**28**	÷ 3; –1; –5; $a = 15$		
29	1; $a = 3$	**33**	$x^3+(2b-a^2)x^2+(b^2-2ac)x-c^2=0$		
30	1; $a = 1$	**34**	$c=6;\ \ a=4+\sqrt{2};\ \ b=4-\sqrt{2};\ \ \angle C=90^0$		
31	–1; $a = 2$	**35**	$c=8;\ \ a=5+\sqrt{7};\ \ b=5-\sqrt{7};\ \ \angle C=90^0$		
32	1; $a = 1$	**36**	$a=8;\ \ b=6+\sqrt{11};\ \ c=6-\sqrt{11};\ \ \angle A=\arccos\frac{3}{5}$		

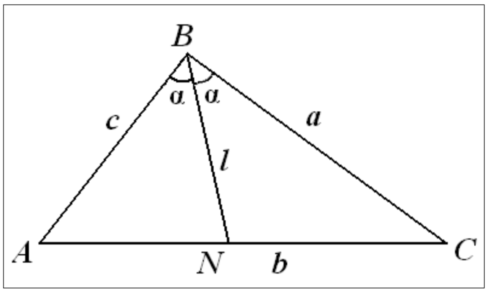
III. ПЛАНИМЕТРИЯ

3.1 Элементы тригонометрии в планиметрии

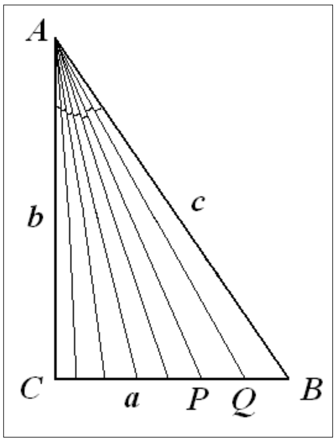
При решении треугольников, а также в теме “Правильные многоугольники” довольно часто встречаются тригонометрические функции 15°, 22,5°, 18°, 36° и другие. Если указанные выше темы в курсе геометрии рассматриваются раньше, чем соответствующие главы алгебры 9 класса, и, тем более, если тригонометрия практически полностью переходит в программу 10 класса, то учащиеся должны иметь элементарные представления о функциях не только 30°, 45°, 60°, 90°, но и других, а также уметь пользоваться теоремами синусов и косинусов без привлечения калькуляторов. Это, несомненно, положительно скажется на общей математической культуре учащихся и подготовит их к пониманию абстрактной тригонометрии 10 класса.



Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис.4), где CO – медиана. В этом случае точка O – центр описанной окружности. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle COB = 2\alpha$. Так как площадь треугольника COB равна половине площади треугольника ABC, то имеем следующее равенство: $\frac{1}{4} bc \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin 2\alpha$.



Учитывая, что $b = c \cdot \cos\alpha$, получаем формулу синуса двойного угла $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$. Следующим необходимым дополнением к решению треугольников является формула для вычисления биссектрисы. Данная формула $\boxed{\ell = \frac{2ac \cdot \cos\alpha}{a+c}}$ (1) легко получается из выражения $S_{ABN} + S_{BNC} = S_{ABC}$ с учётом формулы для синуса двойного угла (все обозначения соответствуют рис.5).



Рассмотрим теперь треугольник, у которого угол CAB разделён на n равных частей (рис.6). Воспользуемся формулой для биссектрисы AQ в треугольнике ABP, причём принято, что $\angle A = n \cdot \alpha$:

$AQ = \frac{2AP \cdot AB \cdot \cos\alpha}{AP + AB}$. Учитывая, что $AQ = \frac{b}{\cos(n-1)\alpha}$, $AP = \frac{b}{\cos(n-2)\alpha}$, $AB = \frac{b}{\cos n\alpha}$, получаем формулу для косинусов $\cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos(n-1)\alpha$.

В случае если $n = 2$ имеем $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

Таким образом, появляется возможность получить тригонометрические функции углов 15°; 22,5° и кратных им 75°; 67,5°; 105°; 157,5°; 165°, если при этом воспользоваться формулами приведения в первой и второй четверти. Например, $\cos^2 15^0 = \frac{1+\cos 30^0}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8}$,

$\cos 15^0 = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Соответственно,

$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75^0 = \sin 165^0$.В случае если $n = 3$ имеем

$\cos 3\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos\alpha$ или $\boxed{\cos 3\alpha = \cos\alpha \cdot (4\cos^2\alpha - 3)}$

Таким образом, появляется возможность получить тригонометрические функции угла 18° и кратных ему 36°; 54°; 72°; 108°; 126^0; 144°; 162°, если при этом воспользоваться формулами приведения в первой и второй четверти (см. таблицу 1). Например,

$\sin 36^0 = \cos 54^0 = \cos(3 \cdot 18^0)$, $2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0$,

$4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0$, $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^0$, $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°$.

Таблица 1.

α	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22,5°	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
36°	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

Возможно получение ещё ряда полезных тригонометрических формул:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, которые понадобятся в дальнейшем. Следует отметить, что для получения формулы тройного угла достаточно было рассмотреть трисекцию угла в треугольнике вместо деления угла на n частей.

3.2 Пифагоровые треугольники

Известны формулы для определения сторон прямоугольного треугольника через натуральные числа, а именно: $\boxed{a = 2mn,\ \ b = n^2 - m^2,\ \ c = n^2 + m^2}$. Исходя из этих формул можно получить известные тройки чисел (см. таблицу 2).

Таблица 2.

№	*a*	*b*	*c*
1.	4	3	5
2.	12	5	13
3.	8	15	17
4.	24	7	25
5.	20	21	29
6.	40	9	41
7.	12	35	37
8.	60	11	61
9.	28	45	53
10.	56	33	65
11.	84	13	85
12.	16	63	65
13.	48	55	73
14.	80	39	89
15.	60	91	109

Но существует и другой вариант получения этих троек чисел. Введём следующие обозначения: $x = c - b,\ \ y = c - a$. Учитывая, что в прямоугольном треугольнике существует две формулы вычисления радиуса вписанной окружности: $2r = a + b - c$ (получена из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности) и $r = \frac{ab}{a+b+c}$ (получена из равенства площадей треугольника, полученных двумя способами) имеем следующие выражения: $\boxed{a = x + 2r,}$ $\boxed{b = y + 2r,\ \ c = x + y + 2r}$. Рассмотрим произведение *xy*:

$$xy = ab - 2r(a+b) + 4r^2 = r(a+b+c) - 2r(a+b) + 4r^2,$$ т.е.

$\boxed{xy = 2r^2}$. Таким образом, задавая целочисленные значения радиуса и выбирая натуральные делители x и y, получаем пифагорову тройку чисел. Сравнивая предыдущие формулы и полученные, можно выявить их связь:

$\boxed{r = m(n-m),\ \ x = 2m^2,\ \ y = (n-m)^2}$

Между тем, сами числа *m* и *n* имеют вполне определённый смысл, если обратиться к формулам для синуса и косинуса угла через формулы с тангенсом половинного угла. Мы видим, что $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2mn}{n^2+m^2} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$,

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} = \dfrac{1 - tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Таким образом, отношение этих чисел есть тангенс половины острого угла в треугольнике $\boxed{tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{m}{n}}$.

На самом деле мы встретились с частным случаем формул так называемого рационального треугольника, в котором, задавая рациональные значения двух тангенсов половинных углов треугольника и радиуса описанной окружности, можно получить треугольник, у которого все параметры будут рациональными числами. В случае с прямоугольным треугольником для получения рационального треугольника достаточно одного тангенса и гипотенузы.

Напомним ряд известных формул, с помощью которых всегда можно воссоздать рациональный треугольник. Эти полезные соотношения удобно использовать при составлении задач, где следует применить формулу Герона.

Итак, пусть даны $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}$. Далее воспользуемся тем, что $\sin A = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2}} = \dfrac{b}{2R}$,

$\sin C = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2}} = \dfrac{c}{2R}$. Учитывая то, что $S = \dfrac{abc}{4R}$ и $S = pr$, получаем при рациональных значениях $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$ и R рациональные значения a, b, c и S.

Например, пусть $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$, тогда $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{11}{7}$. Далее $\sin A = \dfrac{8}{17}$, $\sin B = \dfrac{3}{5}$, $\sin C = \dfrac{77}{85}$. Теперь пусть $R = 85/2$, тогда будет $a = 40$, $b = 51$, $c = 77$, $S = 924$ и $r = 11$.

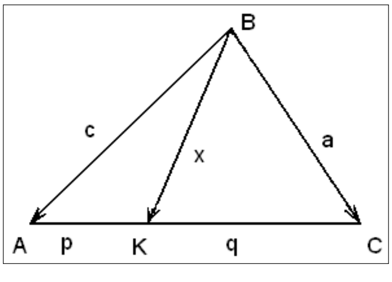
В заключение, приведём небольшую таблицу этих треугольников

Таблица 3.

№	*a*	*b*	*c*	*p*	*S*	h_a	*R*	*r*
1.	3	25	26	27	36	24	325/24	4/3
2.	44	35	75	77	462	21	125/2	6
3.	4	13	15	16	24	12	65/8	3/2
4.	4	53	51	54	90	45	901/30	5/3
5.	6	29	25	30	60	20	145/8	2
6.	7	15	20	21	42	12	25/2	2
7.	7	65	68	70	210	60	221/6	3
8.	8	29	35	36	84	21	145/6	7/3
9.	9	10	17	18	36	8	85/8	2
10.	9	73	80	81	216	48	365/6	8/3
11.	21	10	17	24	84	8	85/8	7/2
12.	11	13	20	22	66	12	65/6	3
13.	11	25	30	33	132	24	125/8	4
14.	12	17	25	27	90	15	85/6	10/3
15.	14	13	15	21	84	12	65/8	4

3.3 Теорема Стюарта

Формулы, позволяющие определить медианы и биссектрисы треугольника по заданным сторонам треугольника, являются частными случаями более общей формулы, которая составляет основу ***теоремы Стюарта***. Рассмотрим треугольник ABC (см. рис.7), в котором AB = c, BC = a, BK = x, AK = p, KC = q, AC = b. По заданным четырём параметрам a, c, p, q определить отрезок BK.



Воспользуемся известным равенством для векторов $\overrightarrow{BA}=\vec{c},\ \overrightarrow{BC}=\vec{a},\ \overrightarrow{BK}=\vec{x}$: $\boxed{\overrightarrow{BK}=\frac{p}{p+q}\cdot\vec{a}+\frac{q}{p+q}\cdot\vec{c}}$, из которого, после возведения в квадрат, получаем выражение

$$x^2 = \frac{p^2}{(p+q)^2}\cdot a^2 + \frac{q^2}{(p+q)^2}\cdot c^2 + \frac{2pq}{(p+q)^2}\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

С другой стороны, $2\vec{a}\cdot\vec{c} = a^2 + c^2 - b^2$.

Таким образом, после подстановки и преобразования, получаем формулу для определения отрезка ВК: $\boxed{x^2 = \frac{p}{p+q}\cdot a^2 + \frac{q}{p+q}\cdot c^2 - pq}$. (2)

Тот же результат можно получить, если записать теорему косинусов для x из треугольника АВК и для стороны a из треугольника АВС, выбрав одинаковый угол А. Далее из системы двух выражений исключить $\cos A$.

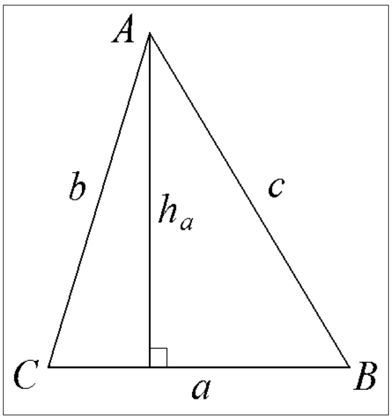
Из формулы (2) следуют выражения для медианы и биссектрисы треугольника.

Пусть отрезок BK – медиана треугольника, тогда $p = q = \frac{b}{2}$ и выражение принимает вид: $\boxed{m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$.

Пусть отрезок BK – биссектриса треугольника, тогда, учитывая, что $\frac{p}{q} = \frac{c}{a} = \frac{b-q}{q}$, получаем ещё ряд формул: $q = \frac{ab}{a+c}$, $p = \frac{bc}{a+c}$, $\boxed{\ell_b^2 = ac - pq}$. (3)

3.4 Решение треугольников

В решении треугольников возможно несколько типов задач, при решении которых необходимо четкое знание многих формул и точные результаты. Причем, при умело подобранных параметрах больших трудностей они не вызывают. Во всех последующих задачах предполагаются обозначения, представленные на рис.8.



Задача 1.

Дано:

ΔABC,

$a = 7$,

$b = 15$,

$c = 20$.

Найти:

S, h_a, R, r, $\cos C$.

Решение.

Площадь треугольника нетрудно рассчитать по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

где $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр треугольника. Высота, проведенная к стороне a, найдется как $h_a = \dfrac{2S}{a}$.

Радиусы описанной и вписанной окружностей определяются равенствами: $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{S}{p}$. Применяя теорему косинусов, получаем $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. В результате вычислений имеем:

$p = 21$, $S = 42$, $h_a = 12$, $r = 2$, $R = 12{,}5$, $\cos C = -3/5$.

Задача 2.

Дано:

ΔABC, $b = 2$,

$c = \sqrt{6}$,

$\angle A = 15°$.

Найти:

a, S, R.

Решение.

В известные соотношения $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, $R = \dfrac{a}{2\sin A}$, подставляем найденные ранее значения функций

$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ и $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, и получаем ответ: $a^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1$,

откуда $a = \sqrt{3} - 1$, $S = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$, $R = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot 4}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{2}$.

Задача 3.

Дано:

ΔABC,

$b = 5$,

$c = 10$,

$S = 15$.

Найти: a.

Решение.

Из формулы для площади треугольника $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ выражаем $\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{3}{5}$. Тогда $\cos A = \pm 4/5$ (см. рис.9). Пользуясь теперь теоремой косинусов для треугольника ABC $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

получаем возможные значения длины стороны a: $\left[\begin{array}{l} a^2 = 45, \\ a^2 = 205, \end{array}\right.$ откуда

$\left[\begin{array}{l} a = 3\sqrt{5}, \\ a = \sqrt{205}. \end{array}\right.$.

Для большей определенности задачи можно указывать – тупым или острым является угол A. На рис. 9 наглядно показана разница между этими случаями.

Задача 4.

Дано:

ΔABC,

$\angle B = 45°$,

$\angle A = 30°$,

$c = \sqrt{3} + 1$

Найти: a, b, S.

Решение.

Теорема синусов для ΔABC дает $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 105°}$,

откуда $2a = \sqrt{2}b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75°} = \frac{(\sqrt{3}+1)4}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = 2\sqrt{2}$. Тогда $a = \sqrt{2}$, $b = 2$.

Площадь легко находится по известной формуле:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Задача 5.

Дано:

ΔABC,

$\angle A = 30°$,

$a = 17$,

$b = 16$.

Решение.

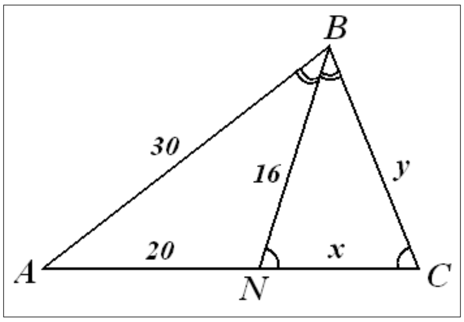
По теореме синусов для ΔABC $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, откуда

$\sin B = \frac{b}{a}\sin A = \frac{16}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{17}$. Т.к. $b < a$, то $\angle B < \angle A$, поэтому cos

Найти: $\angle B$, c.	$B > 0$. Из основного тригонометрического тождества получаем $\cos B = \frac{15}{17}$.

Теорема косинусов для ΔABC дает $c^2 + a^2 - 2ac\cos B = b^2$, откуда после подстановки получаем уравнение: $c^2 - 30c + 33 = 0$, откуда $c = 15 \pm 8\sqrt{3}$. Как уже указывалось ранее, $\angle B < \angle A$, поэтому $\angle C > 120°$, следовательно, $c > a$ и $c > b$, значит, $c = 15 + 8\sqrt{3}$.

3.5 Олимпиадные задачи на треугольники



Задача 1. Отрезок BN является биссектрисой треугольника ABC. Найдите NC, если $AB = 30$, $AN = 20$, $BN = 16$ и угол BNC равен углу BCA. (см. рис.10) (задача №536 б, Л.С. Атанасян и др. Геометрия 7-9 М.: Просвещение, издания до 2008г.)

По условию задачи следует, что сторона $a = 16$, следовательно, из пропорции $\frac{x}{20} = \frac{16}{30}$ находим, что $x = 10\frac{2}{3}$. Однако, из формулы (3) для биссектрисы имеем следующее: $16^2 = 30 \cdot 16 - 20 \cdot x$ и $x = 11\frac{1}{5}$. При данных условиях можно получить и третье значение для отрезка, отличное от двух первых!? Задача некорректно сформулирована, так как в ней избыточное число данных. Уберём одно лишнее условие, например равенство углов BNC и BCA. Составим систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{x}{20} = \frac{y}{30}, \\ 16^2 = 30 \cdot y - 20 \cdot x \end{cases}$$, решением которой является система $$\begin{cases} x = 10\frac{6}{25}, \\ y = 15\frac{9}{25} \end{cases}.$$

Исследование решений задачи можно продолжить последовательно исключая какое-либо данное.

Задача 2. Сумма двух сторон треугольника 613, 47 арш., третья сторона 263,546 арш. Угол, противолежащий меньшей стороне, равен $47^0 56' 13''$.

Определите прочие части тре- угольника и его площадь (выпускной и одновременно вступительный экзамен в университет(!) в гимназиях в 1874г.). Упростим задачу, скорректировав численные данные: сумма двух сторон $m = 60$, косинус заданного угла $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, третья сторона $a = 28$. Пусть b меньшая сторона треугольника. Тогда имеем следующую систему уравнений: $\begin{cases} b + c = m, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \end{cases}$

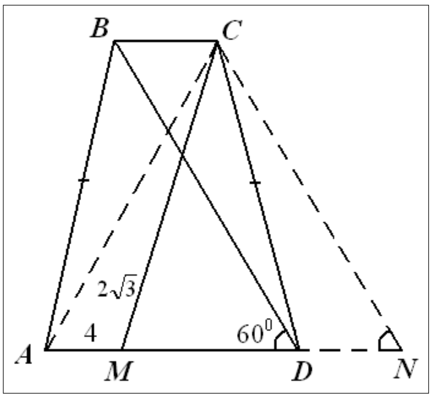
Подставляя из первого уравнения сторону b во второе уравнение, получаем решение системы $\begin{cases} c = \dfrac{m^2 - a^2}{2(m - a\cos\alpha)}, \\ b = \dfrac{m^2 + a^2 - 2am\cos\alpha}{2(m - a\cos\alpha)} \end{cases}$. Учитывая, что $\begin{cases} b < a, \\ b < c \end{cases}$ получаем условия, которым должна удовлетворять сторона a: $\dfrac{m}{1 + 2\cos\alpha} < a < m \cdot \cos\alpha$.

Следует отметить, что по условиям исходной задачи, получаем

$\dfrac{m}{1 + 2\cos\alpha} \approx 262{,}178 < a = 263{,}546$.

По новым данным получаем следующий результат: $\begin{cases} b = 27\dfrac{11}{27}, \\ c = 32\dfrac{16}{27} \end{cases}$, $\quad S = 365\dfrac{1}{27}$.

Задача 3. В равнобедренной трапеции с основаниями *AD* и *BC* угол *BDA* равен 60^0, точка $M \in AD$, $AM = 4$, $\mathrm{CM} = 2\sqrt{3}$. Найти площадь трапеции (см. рис.11).



Построим $CN \parallel BD$ и получим равносторонний треугольник *ACN*, площадь которого равна площади трапеции. Пусть сторона треугольника равна *d*, тогда воспользуемся теоремой Стюарта для равнобедренного треугольника: $(2\sqrt{3})^2 = d^2 - 4(d - 4)$. Получаем значение $d = 2$ и соответственно площадь трапеции $S = \sqrt{3}$. Так как *AM* получилось больше, чем *AN*, то следует рассмотреть случай расположения точки М вне треугольника. Разбирая частный случай теоремы Стюарта для равностороннего треугольника, получим, что результат не зависит от расположения точки М.

3.6 Вывод формул площади четырёхугольника

Попробуем сконструировать формулы площади четырёхугольника, исходя из аналогии с формулами площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

Итак, найдём аналог первой формулы в списке. Пусть дан четырёхугольник

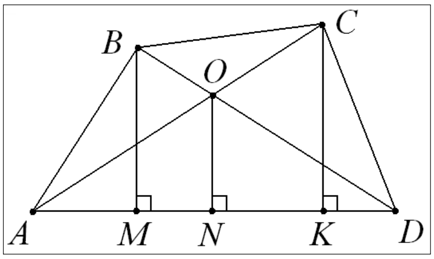


Рис. 12

ABCD (рис. 12), в котором *BM, ON, CK* –высоты на основание *AD*. Составим отношение площадей треугольников, составляющих четырёхугольник: $\frac{S_{ACD}}{S_{AOD}} = \frac{CK}{ON}$. Учитывая подобие треугольников *ACK* и *AON*, имеем: $\frac{CK}{ON} = \frac{AC}{AO}$.

Таким образом, получаем следующее равенство:

$\frac{AC}{AO} = \frac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \frac{S_{ACD}}{S_{AOD}}$. Откуда следует соотношение: $\frac{S_{ABC} + S_{ACD}}{S_{AOB} + S_{AOD}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} = \frac{CK}{ON}$,

из которого, с учётом площади треугольника *ABD*, получаем искомую формулу для площади четырёхугольника $\boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{BM \cdot CK}{ON}}$

Следующие формулы площади четырёхугольника аналогичны последним двум формулам списка. Если четырёхугольник вписан в окружность, то каждый треугольник из четырёх – *ABC, BCD, CDA*, *ABD* (см. рис. 12) – вписан в ту же окружность. Таким образом, площади треугольников выражаются через стороны и радиус *R*:

$S_{ABC}=\dfrac{abd_1}{4R}$, $S_{BCD}=\dfrac{bcd_2}{4R}$, $S_{CDA}=\dfrac{cdd_1}{4R}$, $S_{DAB}=\dfrac{dad_2}{4R}$, где $d_1,\ d_2$ – диагонали.

Складывая попарно площади треугольников, имеем:

$$S=S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=\frac{(ab+dc)d_1}{4R},$$

$$S=S_{ABCD}=S_{BCD}+S_{ABD}=\frac{(bc+ad)d_2}{4R}.$$

Перемножив оба выражения, получаем формулу: $S=\dfrac{\sqrt{d_1d_2(ab+dc)(ad+bc)}}{4R}$, (4)

из которой, учитывая справедливость теоремы Птолемея, окончательно имеем формулу площади четырёхугольника: $\boxed{S=\dfrac{\sqrt{(ac+bd)(ab+dc)(ad+bc)}}{4R}}$

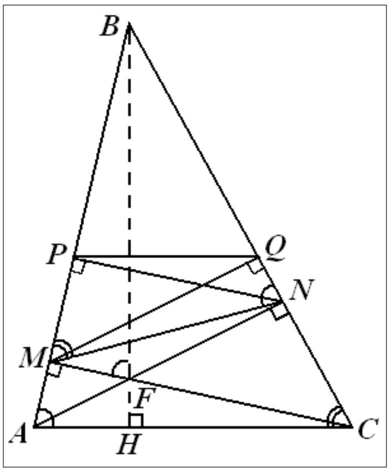
Площади треугольников *ABC*, *BCD*, *CDA*, *ABD* можно также выразить и следующим образом: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin B$, $S_{BCD}=\dfrac{1}{2}bc\sin C$, $S_{CDA}=\dfrac{1}{2}cd\sin D$, $S_{DAB}=\dfrac{1}{2}da\sin A$.

Так как четырёхугольник вписан в окружность, то $\sin B=\sin D,\ \sin A=\sin C$. Складывая опять попарно треугольники, имеем: $ab+cd=\dfrac{2S}{\sin B}$, $bc+ad=\dfrac{2S}{\sin A}$.

Учитывая, что $d_1d_2=2S/\sin\varphi$ и подставляя полученные формулы в (4), после несложных преобразований получаем ещё одну формулу площади четырёхугольника: $\boxed{S=2R^2\sin A\sin B\sin\varphi}$.

Разработка дидактики, где бы использовались перечисленные формулы, может быть темой самостоятельной работы учащихся.

Задача. В остроугольном треугольнике проведены высоты AN и CM. Далее проведены перпендикуляры $NP \perp AB$ $MQ \perp BC$. Отношение $\frac{S_{ABC}}{S_{MPQN}} = \frac{81}{20}$, $MN = 20$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 13).



Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle ABC = \beta$. Четырёхугольник $MBNF$ можно вписать в окружность, следовательно, углы $\angle BFM = \angle BNM = \angle HFC = \alpha$.

Аналогично $\angle BFN = \angle BMN = \angle HFA = \gamma$.

Отсюда $PN = MN \sin\gamma$, $MQ = MN \sin\alpha$,

$S_{MPQN} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(180^0 - \beta) = \frac{MN^2}{2} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$. Так как площадь треугольника $S_{ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MPQN}} = \frac{4R^2}{MN^2} = \frac{81}{20}$ и $R = 9\sqrt{5}$.

Тема **«Метод площадей в решении задач»** в конце раздела по планиметрии – это практическое использование теорем о площадях подобных фигур, о площадях треугольников, имеющих равные основания или равные высоты, а также теоремы о соотношении площадей треугольников, имеющих равный угол. Поэтому основой подобных тем служит хорошая подборка задач.

Задачи для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC известны стороны a, b и c. Определить площадь треугольника S, высоту, проведенную из вершины A, h_a, радиусы вписанной (r) и описанной (R) окружностей, косинус угла C.

Вариант	*1*	*2*	*3*
a	9	21	4
b	10	10	13
c	17	17	15

Вариант	*1*	*2*	*3*

2. В треугольнике ABC известны две стороны и угол между ними. Определить длину третьей стороны, площадь треугольника S и радиус описанной окружности R.

a		2	$\sqrt{6}$
b	2		$2\sqrt{3}$
c	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	
$\angle$**A**	75°		
$\angle$**B**		105°	
$\angle C$			15°

3. В треугольнике ABC известна одна сторона и прилежащие к ней углы. Определить две другие стороны и площадь треугольника S.

Вариант	*1*	*2*	*3*
a		$\sqrt{3}$	
b			$\sqrt{2}$
c	$(\sqrt{3}+1)/2$		
$\angle$**A**	60°		30°
$\angle$**B**	45°	75°	
$\angle C$		45°	105°

4. В треугольнике ABC известны две стороны и угол, лежащий против одной из них. Определить длину третьей стороны, косинус и синус угла, лежащего против второй известной стороны.

Вариант	*1*	*2*	*3*
a	5	10	
b		$13\sqrt{3}$	8
c	6		$5\sqrt{2}$
$\angle$**A**	30°		
$\angle$**B**		60°	
$\angle C$			45°

5. В треугольнике ABC AD и BO – биссектрисы, точка $M \in AB$, точка K лежит на продолжении стороны AC, CH – биссектриса внешнего угла DCK. Отрезки $DM \perp BO$, $DK \perp CH$, $AM = a$, $AK = b$. Найдите AD.

6. В прямоугольном треугольнике ABC CH – высота к гипотенузе треугольника $\boldsymbol{\rho}$ – расстояние между центрами вписанных окружностей в треугольниках ACH и BCH. Найдите радиус вписанной окружности в треугольник ABC.

7. В трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$, $\angle CAD = \alpha$ и $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите площадь $ABCD$.

8. В прямоугольном треугольнике даны высота h и биссектриса ℓ, проведённые из вершины прямого угла. Найти медиану, проведённую из вершины прямого угла.

9. В равнобедренном треугольнике дано отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной R/r. Найти углы треугольника.

10. В треугольнике ABC сторона AB является диаметром окружности, которая пересекает AC и CB в точках M и N. Точка M делит дугу AMB пополам. Дуга MN является шестой частью окружности. Найти MN, если площадь треугольника ABC равна $1+\sqrt{3}/3$.

11. В прямоугольной трапеции ABCD $\angle$A=90^0. Диагональ BD равна 11. Расстояние от точки C до BD равно 4. Диагональ BD делит угол D в отношении 1:2. Найти площадь трапеции.

12. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, AB = 19, BC = 7, CD = 15 и AD = 21. Стороны AB и CD продолжены до пересечения в точке P. Найти BP, PC, cos$D$ и cos$P$.

13. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R, перпендикулярны. Сторона AB равна a. Найти сторону CD.

14. Площадь треугольника ABC равна S. Точки M, N принадлежат стороне AB, а точки K, P стороне BC, причём BN:NM:MA = 1:1:1, BK:KP:PC = 1:2:1. Найдите площадь четырёхугольника $MNKP$.

15. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Найдите площадь трапеции.

16. В параллелограмме *ABCD* точка *M* середина стороны *BC*, точка *K* принадлежит стороне *CD*, причём *CK*:*KD* = 2:1. Площадь треугольника $S_{AMK} = S$. Найдите площадь параллелограмма.

17. В треугольнике *ABC* площадью *S* медианы *AM* и *CK* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь треугольника *OMK*.

18. Выразите сумму квадратов медиан треугольника $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ и сумму четвёртых степеней медиан $m_a^4 + m_b^4 + m_c^4$ через стороны треугольника.

Ответы

1. Вариант	*1*	*2*	*3*
S	36	84	24
h$_a$	8	8	12
R	$10\,{}^5\!/_8$	$10\,{}^5\!/_8$	$8\,{}^1\!/_8$
r	2	3,5	1,5
cos*C*	$-{}^3\!/_5$	${}^3\!/_5$	${}^5\!/_{13}$
2. Вариант	*1*	*2*	*3*
a	$\sqrt{3}+1$		
b		$\sqrt{3}+1$	
c			$3-\sqrt{3}$
S	$(3+\sqrt{3})/2$	$(\sqrt{3}+1)/2$	$3(\sqrt{3}-1)/2$
R	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
3. Вариант	*1*	*2*	*3*
a	$\sqrt{6}/2$		1
b	1	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$	
c		$\sqrt{2}$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$
S	$(3+\sqrt{3})/8$	$(\sqrt{3}+1)/2$	$(\sqrt{3}+1)/4$
4. Вариант	*1*	*2*	*3*
a			$7\sqrt{2}$
b	$4+3\sqrt{3}$		

5. $AD = \sqrt{ab}$. **6.** $r = \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}$.

7. $S = \dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{2} \cdot \sin\alpha$.

8. $m = \dfrac{h\ell^2}{2h^2 - \ell^2}$.

9. $\cos\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 2\dfrac{r}{R}}}{2}$, $180^0 - 2\alpha$.

10. *MN* = 1. **11.** 46,2; 51,04.

12. *BP* = 8, *PC* = 9, cos*D* = 2/7, cos*P* = 2/3.

13 . $CD = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

14. $S_{MNKP} = \dfrac{5}{12} S$.

15. $S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

16. $S_{ABCD} = \dfrac{12}{5} S$.

17. $S_{MKO} = \dfrac{1}{12} S$.

18. $\dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$,

c		$5+12\sqrt{3}$	
***sin*A*; cos*A**		5/13; 12/13	
***sin*B*; cos*B**			4/5; 3/5
***sin*C*; cos*C**	3/5; 4/5		

$\frac{9}{16}(a^4+b^4+c^4)$.

Литература

7. Данкова И.Н. и др., *Предпрофильная подготовка учащихся 9 классов по математике: Общие положения, структура портфолио, программа курсов, сценарий занятий.* – М.: «5 за знания», 2006.

8. Алгебра и начала анализа: сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы/ под ред. С.А.Шестакова.– 2-е изд., испр.– М.: Внешсигма-М, 2007.

9. Колягин Ю.М. и др., *Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10 кл. общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни.* М.: Просвещение, 2008.

10. Алимов Ш.А. и др., *Алгебра*-*9.* – М.: Просвещение, 2008.

11. Безрукова Г.К., Мельникова Н.Б., Шевелёва Н.В. *ГИА – 2009. Экзамен в новой форме. Геометрия. 9 класс.* – М.: АСТ Астрель, 2008.

12. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы 9 класс.* – М.: АСТ Астрель, 2004.

7. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.

8. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.